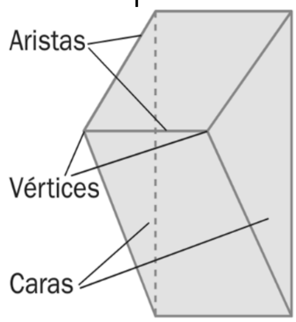
1.- POLIEDROS

Un poliedro es un cuerpo geométrico delimitado por 4 o más polígonos



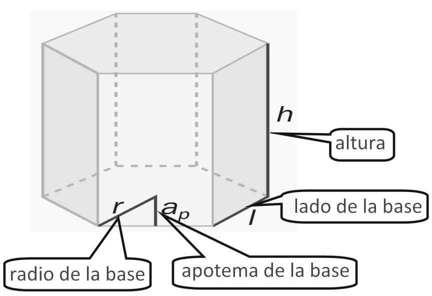
El área de un poliedro es la suma de las áreas de todas sus caras

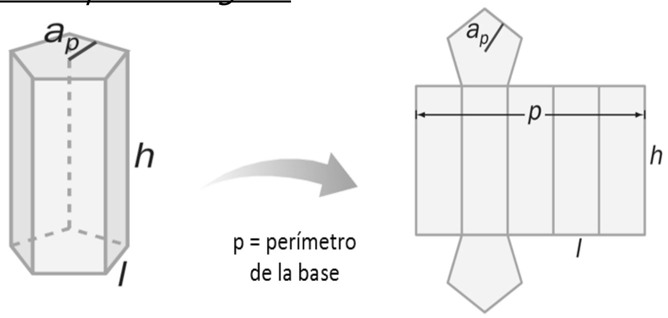
PRISMAS

Un prisma es un poliedro que tiene dos caras iguales y paralelas entre sí, llamadas bases y las caras laterales son paralelogramos.
Si las caras laterales no son perpendiculares a las bases se llama prisma oblicuo.
En este caso las caras laterales son paralelogramos pero no son rectángulos ni cuadrados.

Si las bases son polígonos regulares y las caras laterales rectángulos se llama prisma regular.

Área y volumen de un prisma regular

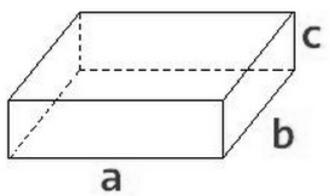




$\boxed{A(\text{prisma}) = 2\,A(\text{base}) + A(\text{lateral})}$ $\boxed{V(\text{prisma}) = A(\text{base}).\,\text{altura}}$

A(lateral) = suma de las áreas de las caras laterales

Ortoedro



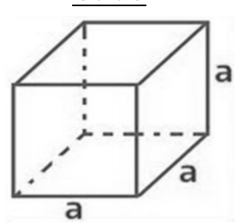
$A(\text{ortoedro}) = ab.2 + ac.2 + bc.2$

$\boxed{A(\text{ortoedro}) = 2(ab + ac + bc)}$

$V(\text{ortoedro}) = A(\text{base}).\,\text{altura}$

$\boxed{V(\text{ortoedro}) = abc}$

Cubo

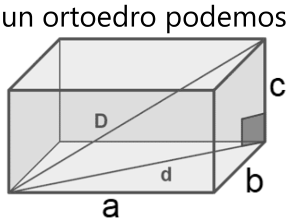


$\boxed{A(\text{cubo}) = 6a^2}$

$V(\text{cubo}) = A(\text{base}).\,\text{altura}$

$\boxed{V(\text{cubo}) = a^3}$

Para calcular la diagonal de un ortoedro podemos usar el teorema de Pitágoras en el espacio:



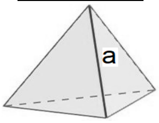
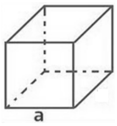
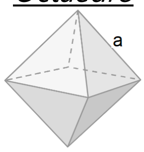
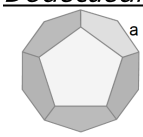
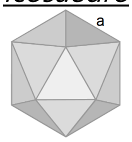
$$D^2 = d^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Para calcular el volumen de un prisma oblicuo podemos usar el principio de Cavalieri, que dice:

"Si dos cuerpos tienen la misma altura y al cortarlos por planos se obtienen figuras con la misma área, entonces los cuerpos tienen el mismo volumen"

POLIEDROS REGULARES

Son los poliedros cuyas caras son polígonos regulares iguales y a cada vértice llegan el mismo número de caras y de aristas. Los ángulos en cada vértice son iguales. Sólo hay 5 poliedros regulares.

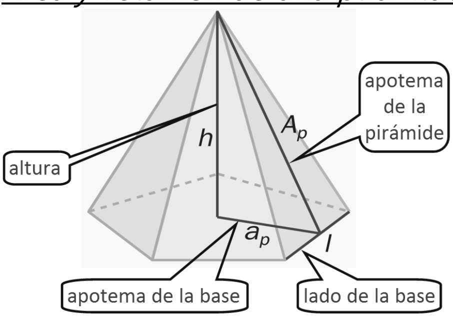
Tetraedro	Cubo	*Octaedro*	*Dodecaedro*	*Icosaedro*
				
Tiene 4 caras que son triángulos equiláteros iguales entre sí (3 caras en cada vértice)	Tiene 6 caras que son cuadrados iguales entre sí (3 caras en cada vértice)	Tiene 8 caras que son triángulos equiláteros iguales entre sí (4 caras en cada vértice)	Tiene 12 caras que son pentágonos regulares iguales entre sí (3 caras en cada vértice)	Tiene 20 caras que son triángulos equiláteros iguales entre sí (5 caras en cada vértice)
$A = a^2\sqrt{3}$	$A = 6a^2$	$A = 2a^2\sqrt{3}$	$A = 2a^2\sqrt{3}$	$A = 5a^2\sqrt{3}$
$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$	$V = a^3$	$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$	$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$	$V = \frac{5(3+\sqrt{5})a^3}{12}$

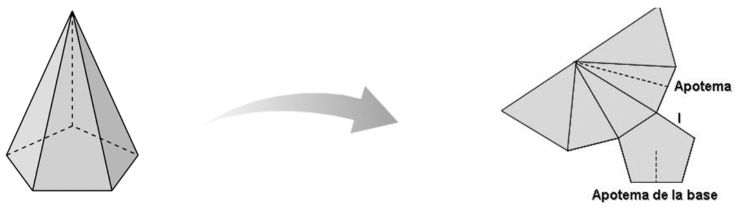
PIRÁMIDES

Una pirámide es un poliedro que tiene una cara llamada base y el resto de caras (caras laterales) son triángulos que llegan a un mismo punto llamado vértice de la pirámide.

Si las bases son polígonos regulares y las caras laterales triángulos isósceles (o equiláteros) se llama pirámide regular.
Si alguna cara lateral no es un triángulo isósceles ni equilátero se llama pirámide oblicua.

Área y volumen de una pirámide regular:



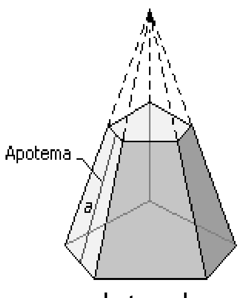


Por Pitágoras: $A_p^2 = a_p^2 + h^2$ A(pirámide regular) = A(base) + A(lateral) $\Rightarrow \boxed{A = A_B + A_L}$

$$V(\text{pirámide regular}) = \frac{A(\text{base}).\text{altura}}{3} \Rightarrow \boxed{V = \frac{A_B.h}{3}}$$

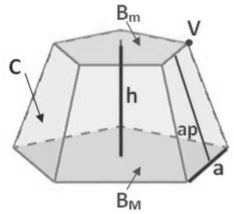
Tronco de pirámide

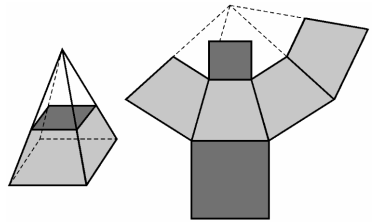
Cuando una pirámide regular se secciona con un plano paralelo a su base, se llama tronco de pirámide regular a la parte de la pirámide comprendida entre el plano y la base.



Si el tronco es de una pirámide regular las caras laterales son trapecios isósceles iguales.

La altura de cada uno de los trapecios se llama apotema del tronco





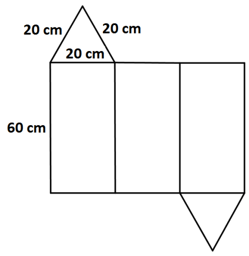
Para calcular el volumen de un tronco de pirámide regular podemos usar la fórmula:

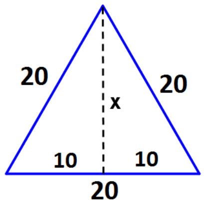
$\boxed{V(\text{tronco de pirámide}) = \dfrac{(A + A' + \sqrt{AA'})h}{3}}$, siendo A y A´ las áreas de las bases y h la altura del tronco

Ejercicios resueltos

1) Un recipiente con tapa es un prisma triangular regular de 6 dm de altura. Las bases son triángulos equiláteros de 20 cm de lado. Calcula el área del prisma en cm^2 y el volumen en litros.

Solución





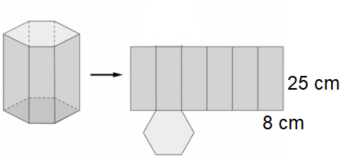
$20^2 = 10^2 + x^2 \rightarrow x \approx 17{,}3$ cm

$A_B = \dfrac{20 \,.\, 17{,}3}{2} = 173 \;\rightarrow\;$ A(prisma) = $2A_B + A_L = 2 \,.\, 173 + 3 \,.\, (20 \,.\, 60) = 346 + 3600 = 3946$ cm^2.

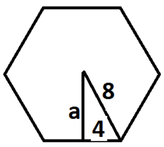
V(prisma) = $A_B \,.\, h = 173 \,.\, 60 = 10\,380$ cm^3 = 10,38 dm^3 = 10,38 litros

2) Un recipiente sin tapa es un prisma hexagonal regular de 0,25 m de altura y el hexágono tiene 8 cm de lado. Calcula el área en cm^2 y el volumen en litros.

Solución



Base del prisma:



$8^2 = 4^2 + a^2 \;\rightarrow\; a \approx 6{,}93$. $A_B = \dfrac{(8.6) \,.\, 6{,}93}{2} \cong 166{,}32$

A(prisma) = $A_B + A_L = 166{,}32 + 6 \,.\, (8 \,.25) = 1\,366{,}32$ cm^2.

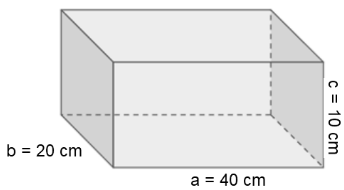
V(prisma) = $A_B \,.\, h = 166{,}32 \,.\, 25 = 4\,158$ cm^3 = 4,158 dm^3 = 4,158 litros

3) Necesitamos construir un recipiente de cristal con tapa con forma de ortoedro de 40 cm de largo, 20 cm de ancho y 10 cm de alto.

a) Calcula los cm^2 de cristal que necesitamos para construirlo

b) Halla los litros de agua que le caben

Solución

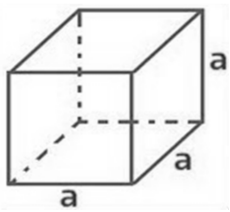


a) El área o superficie es A = 2(ab + ac + bc) = 2(40.20+40.10+20.10) = 2800 cm^2

b) El volumen es V = abc = 40.20.10 = 8 000 $cm^3 \xrightarrow{:1000}$ 8 dm^3 = 8 litros

4) ¿Cuántos litros de pintura necesitamos para pintar 2000 cubos de 0,008 litros de volumen cada uno si con tres litros se pueden pintar 288 dm^2 de superficie?

Solución

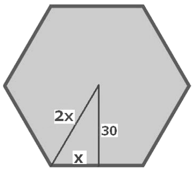


Como $V = a^3 \rightarrow a^3 = 0{,}008\ dm^3 \rightarrow a = \sqrt[3]{0{,}008} = 0{,}2$. El área de un cubo es $A = 6a^2 = 6 \,.\, 0{,}2^2 = 0{,}24\ dm^2$.
El área que hay que pintar es 2000. 0,24 = 480 dm^2.

Haciendo una regla de tres: $\begin{matrix} 3 \text{ litros} & \rightarrow & 288\ dm^2 \\ x & \rightarrow & 480\ dm^2 \end{matrix} \Rightarrow x = \dfrac{480.3}{288} = 5 \text{ litros}$

5) Halla el área y el volumen de una pirámide hexagonal regular de 40 cm de altura, siendo la apotema de la base igual a 30 cm.

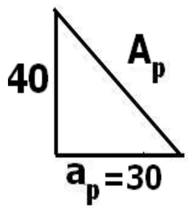
Solución



$(2x)^2 = x^2 + 30^2$; $4x^2 = x^2 + 900$; $3x^2 = 900$; $x^2 = 300$; $x \cong 17{,}32$

Lado = 17,32 . 2 = 34,64. El área de la base es $A_B = \dfrac{\text{perímetro. apotema}}{2} = \dfrac{(34{,}64.6)\ .\ 30}{2} \cong 3117{,}6$

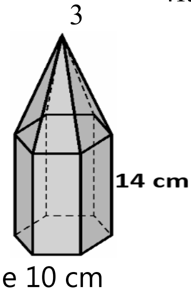
Por otra parte, aplicamos el teorema de Pitágoras para hallar la apotema de la pirámide, A_p, que es la altura de una cara lateral



$A_p^2 = 40^2 + 30^2 = 2500 \Rightarrow A_p = 50$. $A(\text{cara lateral}) = \dfrac{\text{base . altura}}{2} = \dfrac{34{,}64.\ 50}{2} \cong 866$

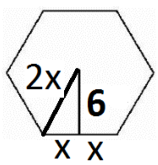
$A(\text{pirámide}) = A_B + A_L = 3117{,}6 + 866.6 = 8313{,}6\ cm^2$ $\quad V = \dfrac{A_B.h}{3} = \dfrac{3117{,}6.40}{3} = 41568\ cm^3 \xrightarrow{:1000} 41{,}568\ dm^3 = 41{,}568\ l$

6) Halla el área y volumen del siguiente cuerpo geométrico



siendo la apotema de la base 6 cm y la apotema de la pirámide 10 cm

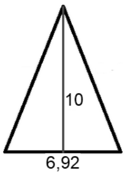
Solución



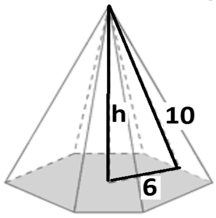
$(2x)^2 = x^2 + 6^2$; $4x^2 = x^2 + 36$; $3x^2 = 36$; $x^2 = 12$; $x \cong 3{,}46$

Lado del hexágono = 3,46 . 2 = 6,92

El área de la base es $A_B = \dfrac{\text{perímetro. apotema}}{2} = \dfrac{(6{,}92.6)\ .\ 6}{2} \cong 124{,}56$

Cara lateral de la pirámide: 

$A = \dfrac{\text{base . altura}}{2} = \dfrac{6,92.\,10}{2} \cong 34,6$

Por otra parte, 

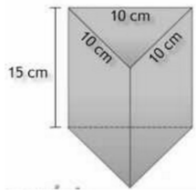
$10^2 = 6^2 + h^2 \Rightarrow h = 8$.

$$A(\text{cuerpo}) = A_B + A_L(\text{prisma}) + A_L(\text{pirámide}) = 124,56 + (6,92.14).6 + 34,6.6 = 913,44 \text{ cm}^2$$

$$V(\text{cuerpo}) = V_{\text{prisma}} + V_{\text{pirámide}} = 124,56\ .14 + \frac{124,56.8}{3} = 1743,84 + 332,16 = 2076 \text{ cm}^3$$

ACTIVIDADES

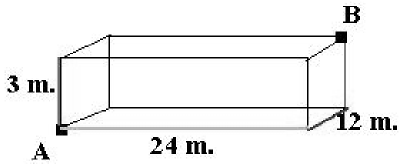
1.- Calcula el área y volumen del siguiente prisma triangular regular



2.- Halla el área y volumen de un recipiente con tapa con forma de prisma hexagonal regular de 30 cm de altura y 6 cm de lado de la base.

3.- Las dimensiones de un tetrabrik son 9,5 cm x 6,4 cm x 16,5 cm. Una empresa produce 2 000 tetrabrik diarios. a) ¿Cuántos m^2 de cartón necesita para fabricarlos? b) ¿Cuántos litros de leche se pueden envasar?

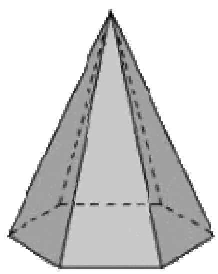
4.- El mosquito Pepito se encuentra en la esquina A de una nave industrial que mide 24 m de largo, 12 m de ancho y 3 m de alto, cuando divisa en el vértice opuesto B a Melinda, su mosquita preferida, ¿qué distancia, en línea recta, habrá de volar Pepito para encontrarse con su amada Melinda?



5.- A una gran pecera de cristal con forma de cubo con tapa le caben 27 litros de agua. ¿Cuántos cm^2 de cristal se necesitan para construir 5 peceras iguales que la anterior?

6.- En un octaedro regular cada arista mide 60 cm. ¿Cuál es el área del octaedro, en dm^2?

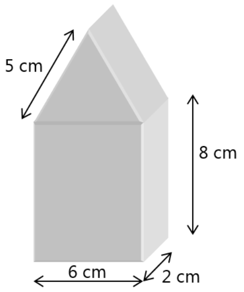
7.- Dada una pirámide hexagonal regular de 4 m de altura y 5 m de apotema, se sabe que el lado de la base mide 3,5 m. Halla:



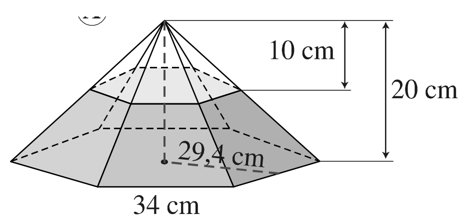
a) La apotema de la base b) El área de la base c) El área de una cara lateral d) El área de la pirámide e) El volumen de la pirámide

8.- Halla el área y volumen de una pieza de forma de pirámide hexagonal de 16 cm de apotema, sabiendo que la base tiene un perímetro de 12 cm.

9.- Calcula el volumen: a)



b)

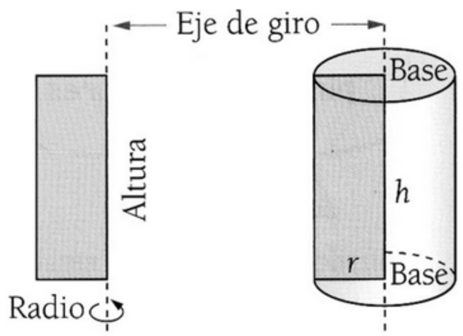


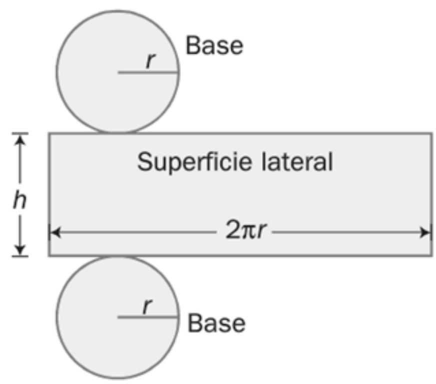
10.- Halla el área y volumen del cuerpo geométrico formado por un prisma cuadrangular regular de 8 cm de altura en el que está apoyada una pirámide 7 cm de altura, siendo la base un cuadrado de 5 cm de lado.

Actividades del libro unidad 9: 41 (pág. 207), 61 (pág. 208), 68 (pág. 209), y autoevaluación 5 (pág. 211)

2.- CUERPOS REDONDOS

Cilindro

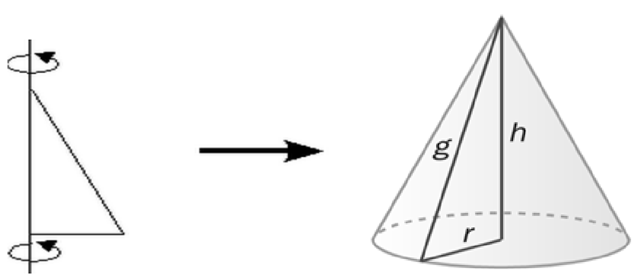


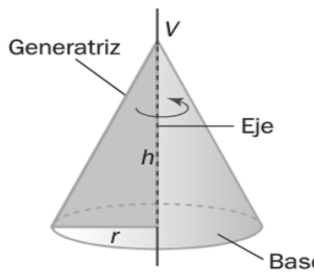


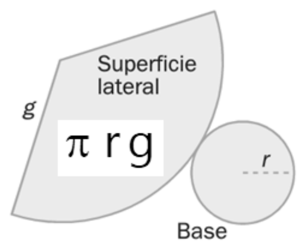
$$A(\text{cilindro}) = 2A(\text{base}) + A(\text{lateral}) = 2\pi r^2 + 2\pi rh \Rightarrow \boxed{A(\text{cilindro}) = 2\pi r(r+h)}$$

$$V(\text{cilindro}) = A(\text{base}).\text{altura} \Rightarrow \boxed{V(\text{cilindro}) = \pi r^2 h}$$

Cono



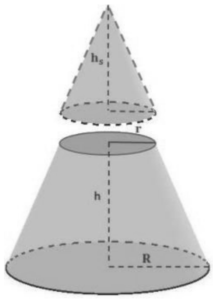


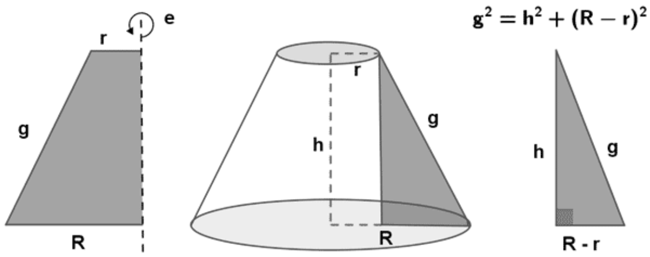


$$A(\text{cono}) = A(\text{base}) + A(\text{lateral}) = \pi r^2 + \pi rg \Rightarrow \boxed{A(\text{cono}) = \pi r(r+g)}$$

$$V(\text{cono}) = \frac{A(\text{base}).\text{altura}}{3} \Rightarrow \boxed{V(\text{cono}) = \frac{\pi r^2 h}{3}}$$

Tronco de cono

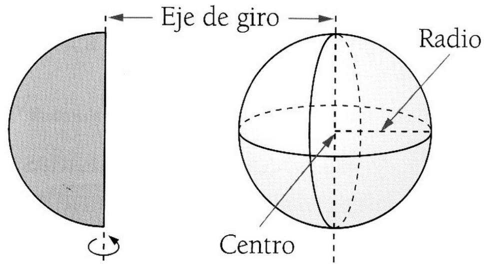




$$A(\text{tronco cono}) = \pi[r^2 + R^2 + (r + R)g]$$

$$V(\text{tronco cono}) = \frac{\pi(R^2 + r^2 + Rr)h}{3}$$

Esfera



$$A(\text{esfera}) = 4\pi r^2$$

$$V(\text{esfera}) = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Cuerpos compuestos

El volumen de un cuerpo compuesto por otros se obtiene sumando los volúmenes de los cuerpos que lo componen

Volúmenes comprendidos entre dos cuerpos

El volumen comprendido entre dos cuerpos se obtiene restándole al volumen del cuerpo mayor el del menor

Cuerpo inscrito en una esfera

Un cuerpo está inscrito en una esfera si cada uno de sus vértices pertenece a ella.

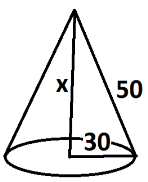
Cuerpo circunscrito a una esfera

Un cuerpo está circunscrito a una esfera si cada una de sus caras es tangente a ella.

Ejercicios resueltos

1) Halla la superficie y los litros de agua que le caben a un recipiente cónico con tapa de 60 cm de diámetro y 50 cm de generatriz.

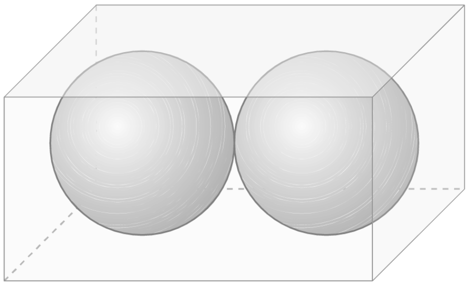
Solución



$50^2 = 30^2 + x^2 \rightarrow x = 40.$ A(cono) = $\pi r(g + r) = 3{,}14 \,.\, 30 \,.\, (50 + 30) = 7\,536$ cm^2.

$$V_{cono} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{3{,}14.30^2.40}{3} = 37\,680 \text{ cm}^3 \xrightarrow{:1000} 37{,}68 \text{ litros}$$

2) En la caja de la figura se quieren guardar dos esferas macizas de 10 centímetros de radio.
¿Cuánto ocupa el aire que queda en la caja?



Solución

V(caja) = largo . ancho . alto = 40 . 20 . 20 = 16000 cm^3 $\quad V_{esfera} = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4.3{,}14.10^3}{3} = 4186{,}67\ \text{cm}^3$

El volumen que queda libre es 16000 – 2 . 4186,67 = 7626,66 cm^3 → aproximadamente 7,6 litros

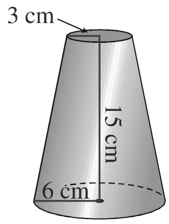
<u>Vistas espaciales</u>: En este enlace https://www.youtube.com/embed/X2A8QswXobQ puedes ver un video sobre las vistas de un cuerpo

ACTIVIDADES

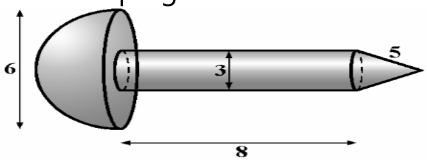
1.- Una empresa de carburantes posee un tanque de almacenamiento cilíndrico de 50 m de diámetro y 40 m de altura. Halla la superficie y el volumen del tanque.

2.- Halla la superficie y los litros de agua que le caben a un recipiente cónico con tapa de 120 cm de diámetro y 100 cm de generatriz.

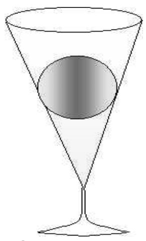
3.- Halla el volumen del tronco de cono



4.- Halla el volumen, en litros, del siguiente cuerpo geométrico. Las medidas del dibujo están dadas en dm

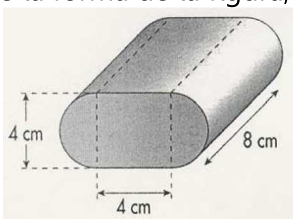


5.- En una copa con forma cónica llena de agua se introduce una bola.



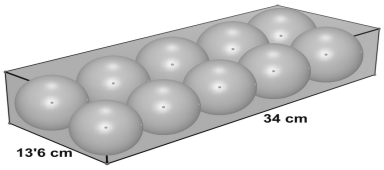
El cono tiene 12 cm de altura y 15 cm de generatriz y la bola 4 cm de diámetro. Calcula qué volumen de agua queda en la copa

6.- Un cartucho de tinta para impresora tiene la forma de la figura, calcula su capacidad:

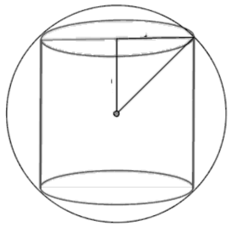


7.- Se colocan en una caja 10 bolas iguales y encajan perfectamente. Véase la figura

¿Qué volumen queda libre en la caja?



8.- En una esfera de 10 cm de diámetro se inscribe un cilindro de 6 cm de altura.



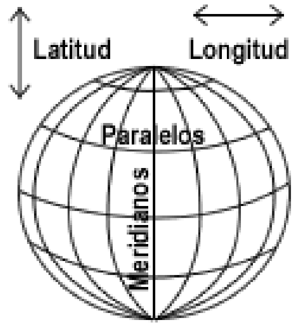
a) Halla el radio del cilindro b) Halla el área de la esfera y del cilindro
c) Calcula cuántos cm^3 le caben más a la esfera que al cilindro.

Actividades del libro unidad 9: 18 (pág. 200), 55, 60, 62, 63 (pág. 208) y 67 (pág. 209)

3.- COORDENADAS GEOGRÁFICAS

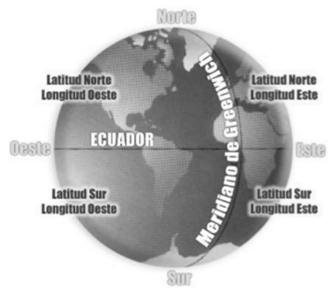
Para localizar un punto de la superficie terrestre se divide el globo terráqueo mediante líneas llamadas paralelos y meridianos.

Los paralelos son líneas perpendiculares a los meridianos. Existe un paralelo mayor o principal, llamado Ecuador que divide a la Tierra en dos partes iguales o Hemisferios Norte y Sur.



Los meridianos son líneas que van de norte a sur pasando por los polos. Todos los meridianos son iguales y se toma como referencia uno principal llamado de Greenwich, que pasa por Londres, dividiendo a la Tierra en dos partes iguales Este y Oeste

Las Coordenadas geográficas nos permiten localizar cualquier punto de la superficie terrestre, utilizando la red de meridianos y paralelos. Las coordenadas geográficas son dos:



Longitud: es la medida en grados, minutos y segundos, desde cualquier punto de la superficie terrestre al meridiano de Greenwich o meridiano 0º. La longitud se mide en Este (de 0º a 180º) u Oeste (de 0º a 180º)

Latitud: es la medida en grados, minutos y segundos, desde cualquier punto de la superficie terrestre al paralelo Ecuador o paralelo 0º. La latitud se mide en Norte (de 0º a 90º) y Sur (de 0º a 90º)
Dos puntos situados en el mismo paralelo tienen la misma latitud
Dos puntos situados en el mismo meridiano tienen la misma longitud
La distancia entre dos puntos A y B de la Tierra, que tienen la misma longitud, es la longitud del arco que los une: $\text{dist } AB = \text{arco } AB = \frac{2\pi R}{360^\circ}.\alpha \rightarrow \boxed{\text{dist } AB = \frac{\pi R\alpha}{180^\circ}}$

R es el radio de la Tierra (R = 6 370 km) y α los grados de latitud que separan a los puntos A y B

Ejercicios resueltos

1) Calcula cuántos grados de longitud y latitud separan a los puntos A y B en los siguientes casos:

a) A : 30ºO 20ºS B: 120ºE 60ºN
Solución: Diferencia de longitud: 30º + 120º = 150º Diferencia de latitud: 20º + 60º = 80º

b) A: 90ºE 80ºS B: 10ºE 40ºS
Solución: Diferencia de longitud: 90º – 10º = 80º Diferencia de latitud: 80º – 40º = 40º

2) Calcula la distancia entre dos puntos A y B en los siguientes casos:

a) A : 30ºE 20ºN B: 30ºE 60ºN *Solución*: $\text{dist } AB = \dfrac{\pi\, 6370.40^\circ}{180^\circ} \cong 4447 \text{ km}$

b) A: 140ºO 80ºS B: 140ºO 40ºN *Solución*: $\text{dist } AB = \dfrac{\pi\, 6370.120^\circ}{180^\circ} \cong 13341 \text{ km}$

3) Dos ciudades situadas en el mismo meridiano distan 4500 km.
¿Cuál es la diferencia, en grados, entre sus latitudes?

Solución: $\text{dist } AB = \dfrac{\pi R \alpha^\circ}{180^\circ} \Rightarrow 4500 = \dfrac{\pi R \alpha^\circ}{180^\circ} \Rightarrow \alpha^\circ = \dfrac{4500.180}{\pi R} = \dfrac{4500.180}{\pi\, 6370} \cong 40{,}5^\circ$

ACTIVIDADES

1.- Calcula cuántos grados de longitud y latitud separan a los puntos A y B en los siguientes casos:
a) A : 90ºO 40ºS B: 140ºE 80ºN b) A: 70ºE 45ºS B: 30ºE 25ºS

2.- Halla la distancia entre dos puntos A y B en los siguientes casos: a) A : 60ºE 40ºN B: 60ºE 54ºN
b) A: 135ºO 70ºN B: 135ºO 12ºS c) A : 10ºE 45ºS B: 10ºE 24ºS

3.- Dos puntos de la Tierra situados en el mismo meridiano distan 800 km. ¿Cuál es la diferencia, en grados, entre sus latitudes?

Actividades del libro unidad 9: 25, 26 (pág. 203) y 48 (pág. 207)

TRABAJO DEL TEMA 8.- MOVIMIENTOS EN EL PLANO

Estudia la teoría, ejemplos y ejercicios resueltos del libro. Después realiza las 10 actividades que se proponen.
El plazo límite para entregar el trabajo a tu profesor es el miércoles 10 de Junio de 2020

2.- Traslaciones: Actividades del libro: 6 (pág. 175) y 32 (pág. 184)

3.- Giros: Actividades del libro: 9, 11 (pág. 177) y 45 (pág. 185)

4.- Simetrías axial y central: Actividades del libro: 18 (pág. 179), 50 (pág. 185) y 62 (pág. 186)

5.- Ejes y centro de simetría en figuras planas: Actividades del libro: 22 (pág. 180) y 63 (pág. 187)