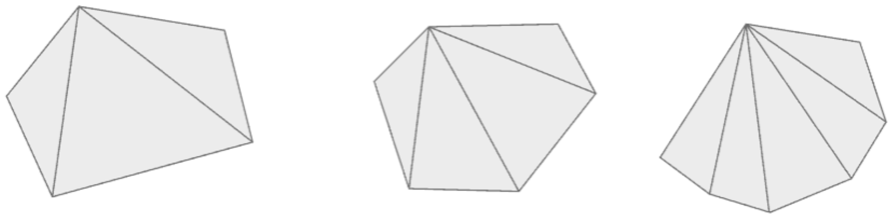
1.- POLÍGONOS Y CIRCUNFERENCIA

Nº de diagonales de un polígono convexo

Observa que el nº de diagonales que salen de cada vértice de un polígono es igual al nº de vértices del polígono menos 3



Pentágono Hexágono Heptágono

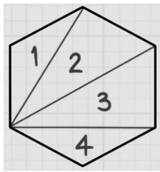
$5 - 3 = 2$ $6 - 3 = 3$ $7 - 3 = 4$

En general, si el polígono tiene n vértices hay n – 3 diagonales que salen de cada vértice.
Habría n(n – 3) diagonales pero como cada diagonal la estamos contando 2 veces, el nº total de diagonales es:

$$\boxed{D = \frac{n(n-3)}{2}}$$

Suma de los ángulos interiores de un polígono convexo

Si queremos calcular, por ejemplo, la suma de los ángulos de un hexágono lo dividimos en triángulos como indica la figura.

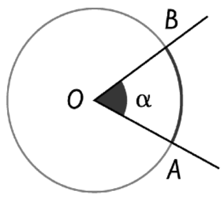
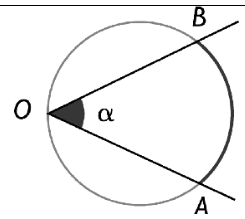
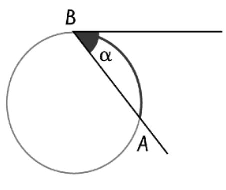
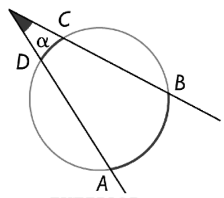
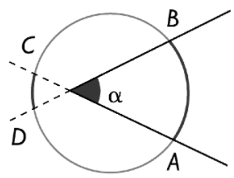


Siempre hay 2 triángulos menos que el nº de lados. En este caso, 4 triángulos
Como la suma de los ángulos de cada triángulo es 180º, la suma de los ángulos del hexágono es
S = 180º.4 = 720º

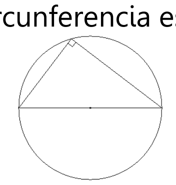
En general, para un polígono de n lados se divide en n – 2 triángulos $\Rightarrow \boxed{S = 180^\circ(n-2)}$

En el caso de que fuera un polígono regular de n lados todos los ángulos medirían lo mismo y por tanto cada ángulo mediría $\boxed{\alpha = \frac{180^\circ(n-2)}{n}}$. Recuerda que cada ángulo central mide $\boxed{c = \frac{360^\circ}{n}}$

Ángulos en la circunferencia

 CENTRAL Tiene su vértice en el centro de la circunferencia y los lados son radios de ella.	 INSCRITO Tiene su vértice en la circunferencia y los lados son secantes a ella. Mide la mitad que el ángulo central correspondiente	 SEMI-INSCRITO Tiene su vértice en la circunferencia y los lados son secante y tangente a ella. Mide la mitad que el ángulo central correspondiente	 EXTERIOR Tiene su centro en un punto exterior a la circunferencia. Mide la semidiferencia de los ángulos centrales correspondientes	 INTERIOR Tiene su centro en un punto interior de la circunferencia. Mide la semisuma de los ángulos centrales correspondientes

Observa que todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto porque el ángulo que abarca es de 180º.



ACTIVIDADES

1.- ¿Cuánto vale cada ángulo interior de un polígono regular que tiene 20 diagonales?

2.- ¿Cuántas diagonales tiene un polígono regular si la suma de sus ángulos interiores vale 8 640º?

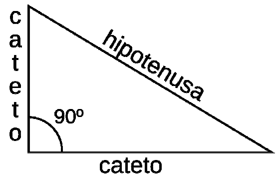
3.- ¿Cuánto mide el ángulo central de un polígono regular de 3402 diagonales?

4.- ¿Cuántas diagonales tiene un polígono regular si se sabe que cada ángulo interior mide 165,6º ?

Actividades del libro: 5, 6, 8 (pág. 153), 27, 28, 31 (pág. 159) y 55 (pág. 166)

2.- REPASO: TEOREMA DE PITÁGORAS

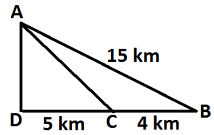
En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos



$\boxed{hipot^2 = cat^2 + cat^2}$

Ejercicios resueltos

1) Cuatro pueblos A, B, C y D están unidos por carreteras rectas, según la figura



Halla la distancia entre los pueblos:

a) A y D → Por Pitágoras, $15^2 = AD^2 + 9^2 \Rightarrow 225 = AD^2 + 81 \Rightarrow AD^2 = 144 \Rightarrow AD = \sqrt{144} = 12$ km

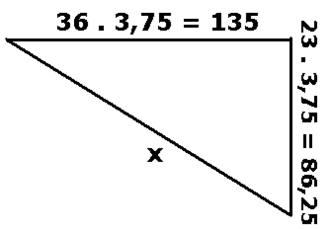
b) A y C → Por Pitágoras, $AC^2 = AD^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow AC = \sqrt{169} = 13$ km

2) Calcula la altura de la farola si la escalera mide 2,6 m y está separada 1 m de la base de la farola.

Si h es la altura de la farola, por Pitágoras, $2{,}6^2 = 1^2 + h^2 \Rightarrow 6{,}76 = 1 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{5{,}76} = 2{,}4$ m

3) Supongamos que dos ciclistas parten del mismo punto uno hacia el Sur y el otro hacia el Oeste. Van en línea recta y con velocidad constante, el primero a 23 km/h y el segundo a 36 km/h.
¿Qué distancia habrá entre los dos cuando pasen 3 h 45 min?

3 h 45 min = 3,75 h distancia hacia el Sur: 23.3,75 = 86,25 km distancia hacia el Oeste: 36.3,75 = 135 km

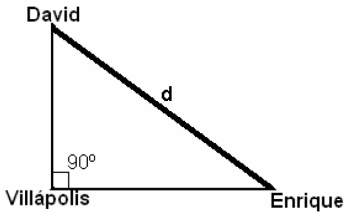


Por Pitágoras, $x^2 = 86{,}25^2 + 135^2 = 25\,664{,}0625 \Rightarrow x = \sqrt{25664{,}0625} \cong 160{,}2$ km

ACTIVIDADES

1.- Un albañil apoya una escalera de 5 m contra un muro vertical. El pie de la escalera está a 3 m de la base del muro. Halla a que altura, x, se encuentra la parte superior de la escalera.

2.- Dos ciclistas, David y Enrique, parten de la misma ciudad, Villápolis, al mismo tiempo en direcciones perpendiculares. David circula a 15 km/h y Enrique a 20 km/h.
a) Al cabo de una hora y media, ¿qué distancia ha recorrido cada uno?
b) Ayudándose del dibujo adjunto, determina qué distancia, d, les separa al cabo de esa hora y media.

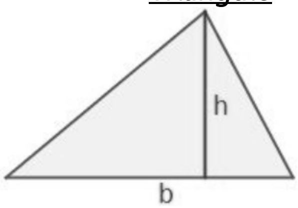
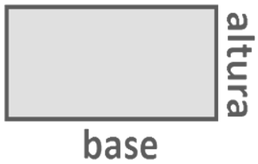
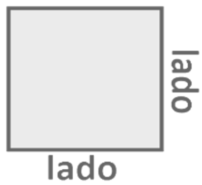


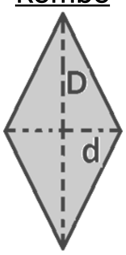
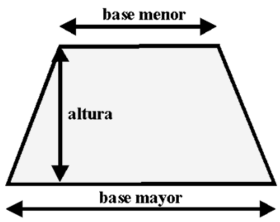
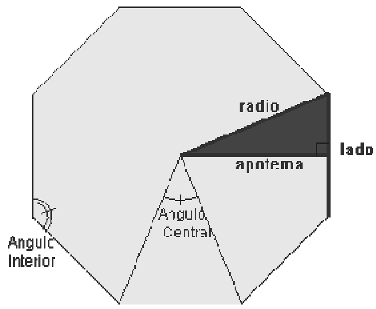
Actividades del libro: 23, 24 (pág. 157) y 83 (pág. 168)

3.- PERÍMETROS Y ÁREAS EN FIGURAS POLIGONALES

Perímetro de una figura: Es la medida del contorno, borde o línea que encierra a la figura.
Si la figura es un polígono, el perímetro es la suma de todos sus lados.
El perímetro se mide usando unidades de longitud.

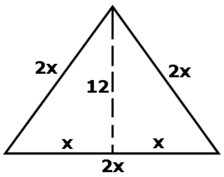
Área de una figura: Es la medida de la región o superficie encerrada por la figura, es decir el área es la cantidad de superficie que ocupa. El área se mide usando unidades de superficie.
Para calcular áreas es muy útil el uso de las fórmulas que se detallan a continuación.

Triángulo	Rectángulo	Cuadrado
 $\boxed{A = \frac{b.h}{2}}$	 $\boxed{A = base\ .\ altura}$	 $\boxed{P = 4.lado}$ $\boxed{A = lado^2}$

Rombo	Trapecio	Polígono regular
 $\boxed{A = \frac{D.d}{2}}$ $\boxed{P = 4.lado}$	 $\boxed{A = \frac{(base\ mayor + base\ menor\ )\ altura}{2}}$	Tiene los lados y los ángulos iguales  $\boxed{P = n.lado\ ,\ siendo\ n\ el\ nº\ de\ lados}$ $\boxed{A = \frac{Perímetro\ .\ Apotema}{2}}$

Ejercicios resueltos

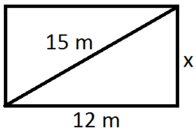
1) Un pañuelo tiene forma de triángulo equilátero de 12 cm de altura. Halla la superficie del pañuelo.

Solución: 

$(2x)^2 = 12^2 + x^2 \Rightarrow 4x^2 = 144 + x^2 \Rightarrow 3x^2 = 144 \Rightarrow x^2 = 48 \Rightarrow x \approx 6{,}93$ cm

Base del triángulo = 2x = 2 . 6,93 = 13,86 $\rightarrow A(triángulo) = \dfrac{base\ .\ altura}{2} = \dfrac{13{,}86\ .\ 12}{2} = 83{,}16\ cm^2$

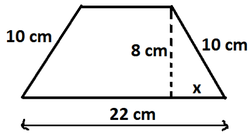
2) Un patio rectangular mide 12 m de largo y 15 m de diagonal.

a) Halla el ancho del patio. *Solución*: 

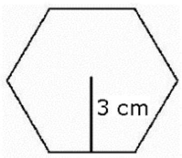
$15^2 = 12^2 + x^2 \Rightarrow 225 = 144 + x^2 \Rightarrow x^2 = 81 \Rightarrow x = 9$ m

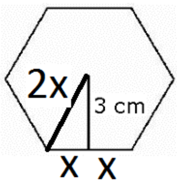
b) El número de losas de 40 cm de lado que necesitamos para enlosarlo.

Solución: Se pasan a cm el largo y el ancho: 12 m = 1200 cm 9 m = 900 cm
Se divide el área del patio entre el área de la losa: (1 200 . 900) : (40^2) = 1 080 000 : 1 600 = 675 losas

3) Dado el siguiente trapecio isósceles 

a) Calcula x. *Solución*: $10^2 = 8^2 + x^2 \Rightarrow 100 = 64 + x^2 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$ cm
b) Halla el perímetro del trapecio.
Solución: La base menor es: 22 – (6 + 6) = 10 cm $\rightarrow$ El perímetro es: 22 + 10 + 10 + 10 = 52 cm

4) Halla el área del siguiente hexágono regular 



Sol. Por el teorema de Pitágoras
$$\left|\begin{array}{l}(2x)^2 = x^2 + 3^2 \\ 4x^2 = x^2 + 9 \Rightarrow 4x^2 - x^2 = 9 \\ 3x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = \dfrac{9}{3} = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3} \cong 1{,}7\end{array}\right.$$

El lado del hexágono es $2\ .\ 1{,}7 = 3{,}4$

$$Por\ tanto,\ el\ área\ es: A = \frac{P\ .\ a}{2} = \frac{(3{,}4\ .\ 6)\ .\ 3}{2} = \boxed{30{,}6\ cm^2}$$

Figuras compuestas

El área de una figura compuesta por otras se obtiene sumando las áreas de las figuras que la componen

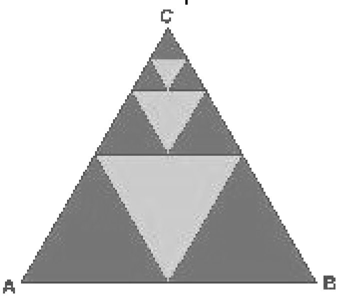
Áreas comprendidas entre dos figuras

El área comprendida entre dos figuras se obtiene restándole al área de la figura mayor la de la menor

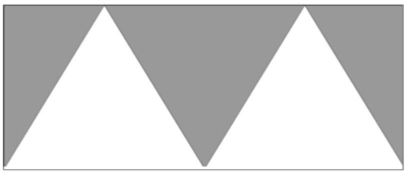
ACTIVIDADES

1.- Halla la superficie de una señal de tráfico que tiene forma de triángulo equilátero de 18 cm de altura.

2.- Sabiendo que el área del triángulo ABC es 1024 cm^2, halla la suma de las áreas de los triángulos más claros:



3.- Calcula el área y perímetro de la zona sombreada sabiendo que la altura del rectángulo es 12 cm y cada triángulo blanco es equilátero



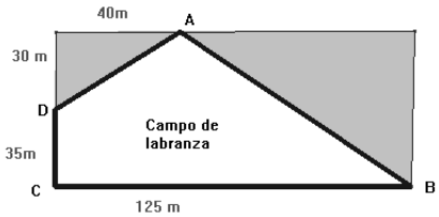
4.- El patio de un colegio es rectangular y tiene 40 m de largo y 50 m de diagonal. Halla su superficie y su perímetro.

5.- Calcula el precio de un mantel cuadrado de 3 m de diagonal si el m^2 de tela cuesta 15 €

6.- Un pequeño jardín con forma de rombo se ha rodeado con una valla de 20 m. Calcula su superficie sabiendo que la diagonal menor mide 6 m.

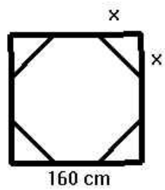
7.- Una parcela tiene forma de trapecio isósceles de 30 m de altura, base mayor 100 m y lados no paralelos 50 m cada uno. Se ha rodeado con una valla.
a) ¿Cuánto mide la valla? b) ¿Cuál será su precio a razón de 20,50 €/m^2?

8.- De un campo rectangular se han suprimido dos triángulos rectángulos (tal como indica la figura), resultando un cuadrilátero ABDC que se va a utilizar como campo de labranza.



a) ¿Cuál es la superficie de dicho campo de labranza?
b) Si se quiere rodear con una cerca, ¿cuántos metros hacen falta?

9.- ¿Cuánto debe valer x para que la superficie del octógono regular sea 2,06 m^2?



10.- Calcula la superficie que ocupa un panal de abejas que tiene 120 celdillas, si cada celdilla es un hexágono regular de 5 mm de apotema.

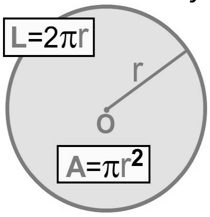
11.- Calcula el área comprendida entre un rectángulo de 12 cm de base y 15 cm de diagonal y el rombo inscrito en él

12.- La forma de una baldosa es un hexágono regular de 5,4 cm de lado, y la de otra, un cuadrado de 12 cm de diagonal. ¿Cuál de las dos ocupa mayor superficie?

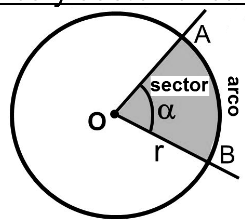
Actividades del libro: 58, 62 (pág. 167) y 81 (pág. 168)

4.- PERÍMETROS Y ÁREAS EN FIGURAS CIRCULARES

Circunferencia y círculo



Arco y sector circular

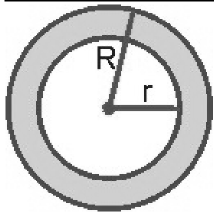


$$\begin{array}{l} 360^\circ \rightarrow 2\pi r \\ \alpha \rightarrow \widehat{AB} \end{array} \Rightarrow \widehat{AB} = \frac{2\pi r.\alpha}{360^\circ} \Rightarrow \boxed{\widehat{AB} = \frac{\pi r\,\alpha}{180^\circ}}$$

$$\begin{array}{l} 360^\circ \rightarrow \pi r^2 \\ \alpha \rightarrow S \end{array} \Rightarrow \boxed{S = \frac{\pi r^2.\alpha}{360^\circ}}$$

$$P = r + r + \widehat{AB} = \boxed{2r + \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180^\circ}}$$

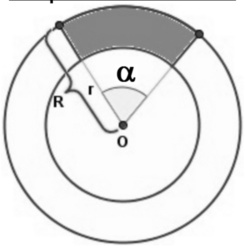
corona circular



$$A(\text{corona}) = \pi R^2 - \pi r^2 \xrightarrow{\text{sacando factor común } \pi} \boxed{A(\text{corona}) = \pi(R^2 - r^2)}$$

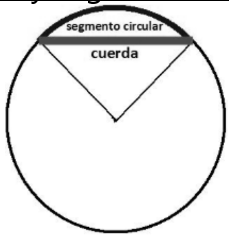
$$P(\text{corona}) = 2\pi R + 2\pi r \xrightarrow{\text{sacando factor común } 2\pi} P = 2\pi(R + r)$$

trapecio circular



$$\begin{array}{lll} 360^\circ & \rightarrow & A(\text{corona}) = \pi(R^2 - r^2) \\ \alpha & \rightarrow & T \end{array} \Rightarrow \boxed{T = \frac{\pi(R^2 - r^2).\alpha}{360^\circ}}$$

cuerda y segmento circular



A(segmento circular):
A(sector circular) – A(triángulo)

L(cuerda) = base del triángulo

Polígono inscrito en una circunferencia

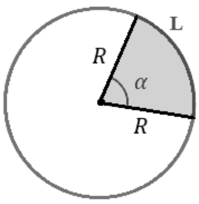
Un polígono está inscrito en una circunferencia, si cada uno de sus vértices pertenece a ella.

Polígono circunscrito a una circunferencia

Un polígono está circunscrito a una circunferencia, si cada uno de sus lados es tangente a ella.

Ejercicios resueltos

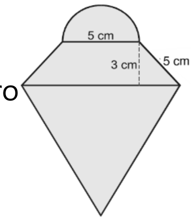
1) Halla el perímetro y área de un sector circular de 60º de una circunferencia de 10 cm de diámetro



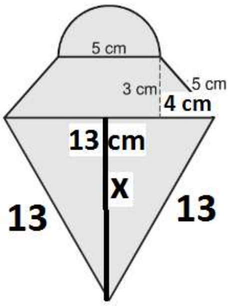
$$R = 5\ ,\ \alpha = 60^\circ \Rightarrow \begin{array}{l} A(\text{sector}) = \dfrac{\pi R^2.\ \alpha}{360^\circ} = \dfrac{\pi.5^2.60}{360^\circ} = \dfrac{25\pi}{6} \cong 13{,}1\ cm^2 \\ L(\text{arco}) = \dfrac{\pi R\,\alpha}{180^\circ} = \dfrac{\pi.5.60}{180^\circ} = \dfrac{5\pi}{3} \cong 5{,}2\ cm \end{array}$$

El perímetro del sector es L + 2R = 5,2 + 2.5 = 15,2 cm

2) Calcula el área y el perímetro de la siguiente figura, sabiendo que el triángulo es equilátero



Solución:



Sol. Por el teorema de Pitágoras

$$\begin{cases} \text{Se calcula el cateto que falta}: 5^2 = cat^2 + 3^2 \Rightarrow cat = 4\ cm \\ \text{Se calcula altura del triángulo}: 13^2 = x^2 + 6{,}5^2 \\ 169 = x^2 + 42{,}25 \Rightarrow x^2 = 169 - 42{,}25 = 126{,}75 \Rightarrow x \cong 11{,}26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A(\text{semicírculo}) = \dfrac{\pi R^2}{2} = \dfrac{3{,}14\ .\ 2{,}5^2}{2} \cong 9{,}8 \\ A(\text{trapecio}) = \dfrac{(B+b)\ .\ h}{2} = \dfrac{(13+5)\ .\ 3}{2} = 27 \\ A(\text{triángulo}) = \dfrac{\text{base}\ .\ \text{altura}}{2} = \dfrac{13\ .\ 11{,}26}{2} = 73{,}2 \end{cases}$$

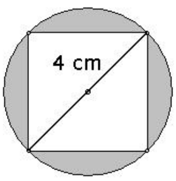
Por tanto, el área de la figura es: $9{,}8 + 27 + 73{,}2 = \boxed{110\ cm^2}$

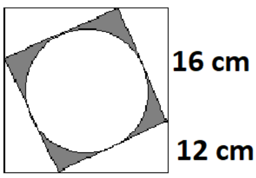
El perímetro es $P = 13.2 + 5.2 + \dfrac{2\ \pi\ .\ 2{,}5}{2} \cong \boxed{43{,}8\ cm}$

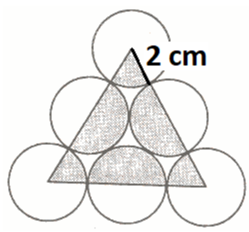
ACTIVIDADES

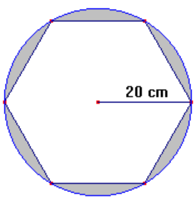
1.- Calcula el perímetro y área de un sector circular de 100º y 4 cm de radio

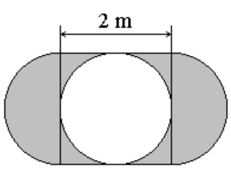
2.- Halla la superficie de la zona sombreada de cada figura:

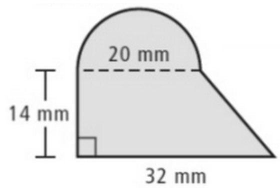
a) 

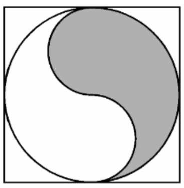
b) 

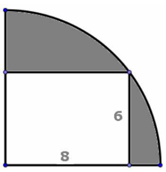
c) 

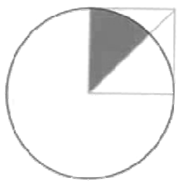
d) 

e) 

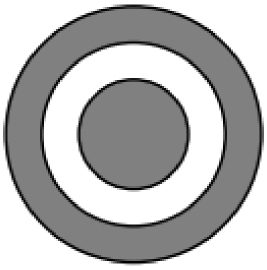
f) 

g)  lado del cuadrado: 20 cm

h) 

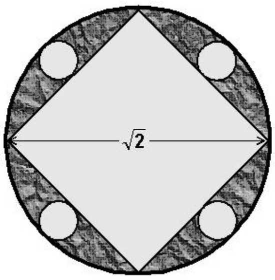
i)  lado del cuadrado: 20 cm

3.- En la diana de la figura, el círculo intermedio tiene un radio doble del que tiene el círculo pequeño y el círculo grande un radio triple del que tiene el círculo pequeño. La diana tiene una superficie total de 36π cm^2. ¿Cuál es el área de la corona blanca?



4.- Halla el radio mayor de un trapecio circular de 10 m^2 de área si abarca un ángulo α = 30º y el radio menor mide 2 m.

5.- Un fabricante de turrones decide embalar sus productos en cajas circulares como muestra la figura.
Si la parte más oscura es usada para el papel de embalaje, encuentra la superficie útil para el turrón.
(La medida está dada en dm). Expresa el resultado en cm^2 redondeado a las unidades



6.- Halla el área comprendida entre las circunferencias inscrita y circunscrita a un polígono regular de 16 m de lado y 6 m de apotema. (Redondea el resultado a las unidades)

Actividades del libro: 37, 38 (pág. 161), 60, 63, 65 (pág. 167) y 85 (pág. 169)