1.- EXPERIMENTOS ALEATORIOS. PRINCIPIO DE MULTIPLICACIÓN

Experimentos aleatorios y deterministas

Un *experimento aleatorio* es aquel en que sabemos todos los posibles resultados pero no sabemos de antemano que resultado vamos a obtener.
Por ejemplo, lanzar un dado es un experimento aleatorio porque sabemos que nos puede salir cualquier número del 1 al 6 pero no cuál.
También son experimentos aleatorios: lanzar una moneda, sacar sin mirar una bola de una bolsa que tiene bolas de colores, sacar sin mirar una carta de la baraja, etc.

Los experimentos que no son aleatorios se llaman *experimentos deterministas*.

Por ejemplo, son experimentos deterministas observar a qué temperatura hierve el agua destilada porque sabemos de antemano que va a hervir a 100 ºC o sacar una bola de una bolsa con bolas blancas y observar su color porque sabemos que siempre va a salir blanca

Principio de multiplicación

Es una técnica que sirve para saber *cuántos* resultados tiene un experimento que consta de dos o más etapas.
El principio de multiplicación se basa en que el número de resultados totales se calcula multiplicando el número de resultados de cada etapa.

Por ejemplo, si Roberto tiene 5 tipos de camisas, 3 tipos de pantalones y 4 tipos de zapatos, el número de formas distintas de combinarlos para vestirse es 5 . 3 . 4 = 60

Permutaciones: Se llama permutación a cada una de las formas de ordenar los elementos de un conjunto. Por ejemplo, las formas de ordenar las tres primeras letras del alfabeto son
abc, acb, bac, bca, cab y cba. Hay 6 permutaciones.

Para calcular el número de permutaciones podemos usar el principio de multiplicación.

En el ejemplo anterior hay 3 formas de elegir la 1ª letra, para la 2ª letra sólo hay 2 formas porque no podemos elegir la letra que ya hemos elegido y para la 3ª letra sólo queda 1 forma.
Luego, el número de permutaciones de las 3 letras es 3 . 2 . 1 = 6

Para saber cuántos números de 5 cifras distintas se pueden formar con los dígitos 2, 4, 6, 7 y 9 tenemos que calcular el número de permutaciones de 5 elementos, que es 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120, es decir, se pueden formar 120 números.

En general, el número de permutaciones de n elementos es: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Factorial de un número: El producto anterior se llama factorial del número n y se representa por n!

Por ejemplo, 1! = 1 , 2! = 2 . 1 = 2 , 3! = 3 . 2 . 1 = 6 , 4! = 4 . 3 . 2 . 1 = 24 , etc.

El factorial de un número también se puede hallar con la calculadora científica CASIO usando la función x!

Por ejemplo, si queremos calcular 13! , el proceso es el siguiente: 13 SHIFT $\boxed{x^{-1}}$ $\boxed{=}$.
Da 6 227 020 800.
Este resultado coincidiría con la multiplicación: 13.12.11.10.9.8.7.6.5.4.3.2.1

Como ves el factorial de un número se va haciendo muy grande rápidamente tanto que sólo podemos calcular con nuestra calculadora hasta 69! Prueba que 70! ya nos da error porque el resultado tiene tantas cifras que no caben en la pantalla.

ACTIVIDADES

1.- Resuelve los siguientes problemas:
a) ¿Cuántos resultados se pueden obtener si lanzamos un dado tres veces?

b) Para financiar el viaje de fin de curso, un grupo de alumnos ha encargado unas camisetas en dos colores: blanco y azul. Si las tallas son cuatro: pequeña, mediana, grande y extragrande, ¿cuántos modelos diferentes de camisetas tendrán que elaborar?
c) Una fábrica de coches fabrica modelos de 1600, 1800 y 2000 cm^3 en cinco colores cada uno, blanco, negro, azul, amarillo y rojo, y con tres o cinco puertas cada tipo. ¿Cuántos coches diferentes puede haber?

d) Desde el 18 de septiembre de 2000, se implantó en España el nuevo sistema de matriculación europea, que como sabes consta del indicativo del país, cuatro números y tres letras.
Sólo se usan 20 letras, porque las letras A-E-I-O-U-Ñ-Q no se incluyen. Los números si son todos, del 0 al 9. ¿Cuántos coches se pueden matricular en España con este sistema?

e) Marta participa en un juego que consiste en elegir primero un número del 1 al 50 y después una carta de la baraja española de 40 cartas. ¿Cuántos resultados distintos puede obtener?

f) Si de una bolsa que tiene 300 bolas numeradas del 1 al 300, se extraen al azar 4 bolas sin reemplazamiento, ¿cuántos resultados puede haber? ¿Y si las extracciones se hacen con reemplazamiento?

2.- Resuelve los siguientes problemas:
a) Un vendedor tiene que visitar 5 ciudades, Albacete, Barcelona, Córdoba, Madrid y Estepona.
Si no quiere repetir ciudades, ¿cuántas rutas distintas puede elaborar si puede empezar y acabar en cualquiera de las ciudades?

b) Con las letras de la palabra PELUCA ¿Cuántas ordenaciones distintas se pueden hacer?

c) ¿De cuántas formas se pueden ordenar 10 alumnos de una clase?

d) Un cd tiene 12 canciones que se pueden escuchar en cualquier orden. Luís se ha propuesto escucharlas cada día en un orden diferente. ¿Cuánto tiempo tardaría en hacerlo? ¿Podrá hacerlo?

e) ¿Cuántos números de 7 cifras distintas se pueden formar con los dígitos 2, 4, 5, 6, 7, 8 y 9?

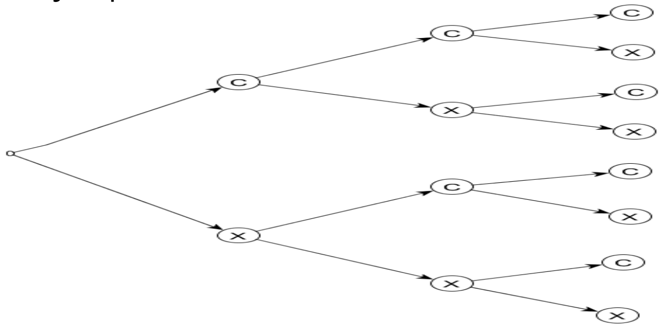
Actividad del libro: 34 (pág. 310)

2.- ESPACIO MUESTRAL Y SUCESOS ALEATORIOS

Espacio muestral de un experimento aleatorio

El espacio muestral de un experimento aleatorio es el conjunto formado por todos los resultados que podemos obtener al hacer el experimento. El espacio muestral se representa con la letra **E**.
Por ejemplo, si extraemos al azar una bola de una caja que tiene bolas rojas, verdes, negras y blancas y anotamos el color el espacio muestral es E = { R, V, N, B }
Para determinar el espacio muestral a veces se utiliza un diagrama de árbol.

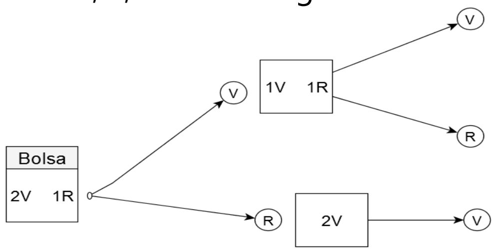
Por ejemplo, si lanzamos una moneda tres veces



E = {CCC , CCX , CXC , CXX , XCC , XCX , XXC , XXX}

Otro ejemplo: Una caja tiene 2 bolas verdes y 1 roja. Sacamos sucesivamente 2 bolas sin devolución.

Hallemos el espacio muestral, E, usando diagrama de árbol



E = {VV, VR, RV}

Sucesos aleatorios

Un suceso aleatorio es el conjunto formado por algunos resultados de un experimento aleatorio. Los sucesos se representan con letras mayúsculas

Ejemplo:

En el experimento de sacar al azar una bola de una bolsa que contiene 8 bolas numeradas del 1 al 8 algunos sucesos son: A = salir un número menor que 3 = {1, 2}   B = salir un múltiplo de 4 = {4, 8}
C = { 2 , 3 , 5 , 7 } = salir un número primo

Suceso seguro

El suceso seguro es el suceso que siempre se cumple. Está formado por todos los resultados del experimento y, por tanto, coincide con el espacio muestral, E.

Ejemplos:

Al lanzar una moneda el suceso "salir cara o cruz" es un suceso seguro
Cuando lanzamos un dado el suceso "salir un número menor que 7" es un suceso seguro

Suceso imposible

El suceso imposible es el nunca ocurre. Es el conjunto que "no tiene ningún elemento".
Este conjunto se llama conjunto vacío y se representa con el símbolo $\varnothing$

Ejemplos:

1) Al lanzar un dado "salir un número de dos cifras" es un suceso imposible.
2) Si una bolsa sólo tiene bolas blancas y negras, entonces el suceso "sacar bola roja" es un suceso imposible.

Suceso contrario

Dado un suceso A, el suceso contrario o complementario de A es aquel que expresa lo contrario que el suceso A y está formado por todos los resultados del experimento excepto los del suceso A.
El suceso contrario de A se representa por A^c o también por $\overline{A}$.

Ejemplos:

Si lanzamos un dado y el suceso A = "salir número par" = {2, 4, 6}, entonces el suceso contrario es

A^c = "no salir número par" = "salir número impar" = {1, 3, 5}

Al lanzar un dado, si A = "salir un número mayor que 4" = {5, 6} entonces el suceso contrario es

A^c = "salir un número menor o igual que 4" = {1, 2, 3, 4}

Sucesos compatibles y sucesos incompatibles

Dos sucesos A y B son incompatibles cuando NO pueden ocurrir al mismo tiempo. En caso contrario, los sucesos son compatibles.

Ejemplos:

1) En el lanzamiento de un dado los sucesos A = "salir un número par" y B = "salir un número primo" son compatibles ya que si tiro el dado y si sale un 2, ocurren los dos sucesos a la vez: 2 es un número par y también es un número primo

2) Si sacamos una carta de la baraja, los sucesos A = "salir un basto", B = "salir una espada" son incompatibles, pues al sacar una carta no puede salir a la vez un basto y una espada

ACTIVIDADES

1.- Usa un diagrama de árbol para hallar el espacio muestral que consiste en elegir una a una las letras de la palabra SOL

2.- Supongamos que para ir de Granada a Málaga hay 2 carreteras y de Málaga a Sevilla 3 carreteras, ¿cuáles son todas las rutas posibles para ir de Granada a Sevilla pasando por Málaga?

3.- Halla el espacio muestral del experimento aleatorio que consiste en lanzar una moneda y después sacar una bola de una bolsa que contiene tres bolas, roja, azul y negra.

4.- Una bolsa tiene 3 bolas blancas, 2 negras y 1 roja. Sacamos sucesivamente 2 bolas.
Halla el espacio muestral en los siguientes supuestos:
a) Las extracciones se hacen con devolución b) Las extracciones se hacen sin devolución

5.- Se lanza un dado dos veces. Determina el suceso A = "la resta de los puntos es 2"

6.- Se tiene una caja con 3 bolas rojas, 2 negras y 1 azul. Se sacan sucesivamente dos bolas, sin devolverlas a la bolsa.
a) Determina los sucesos A = "la 2ª bola es azul", B = "la 1ª bola es negra".
b) Indica si A y B son compatibles o incompatibles

7.- Sacamos al azar una bola de una bolsa que contiene 15 bolas numeradas del 1 al 15.
a) Determina el espacio muestral b) Describe los sucesos: A = salir un número mayor que 7
B = salir un múltiplo de 4 C = salir un número menor que 3 D = salir un número de dos cifras
F = salir un número mayor que 15 G = salir un número menor que 16

c) Determina si A y B son compatibles d) Halla el suceso contrario de C

Actividad del libro: 41 (pág. 310)

3.- CÁLCULO DE PROBABILIDADES

La probabilidad de un suceso indica si es más o menos frecuente que ocurra dicho suceso.
La probabilidad de un suceso A se representa por p(A) o simplemente por p y se suele expresar en forma de porcentaje.

Para calcular la probabilidad de un suceso se divide el número de casos favorables (o sea el nº de elementos del suceso) entre el número de casos posibles (o sea el nº total de resultados):

REGLA DE LAPLACE : $p(A) = \dfrac{\text{Número de casos favorables a que ocurra A}}{\text{Número de casos posibles}}$

Ejemplo: Si se saca una bola al azar de una bolsa que tiene 3 bolas negras y 5 azules, la probabilidad de que sea azul es $p = \frac{5}{8} = 0{,}625 = 62{,}5\%$

Algunas propiedades de la probabilidad

1) La probabilidad del suceso seguro es 1: $p(E) = 1$

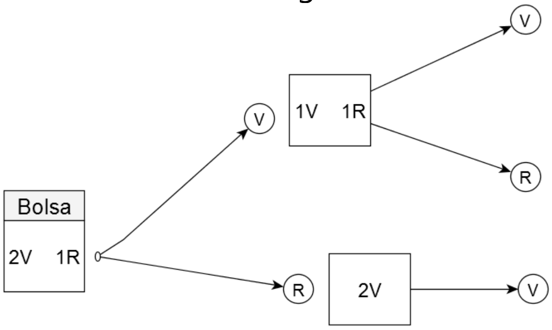
2) La probabilidad del suceso imposible es 0: $p(\varnothing) = 0$

3) La probabilidad de un suceso A siempre está entre 0 y 1: $0 \leq p(A) \leq 1$

4) La probabilidad del suceso contrario de un suceso A es $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

Ejemplos

1) Una caja tiene 2 bolas verdes y 1 roja. Sacamos sucesivamente 2 bolas sin devolución. Hallemos el espacio muestral usando diagrama de árbol



E = {VV, VR, RV}

Por ejemplo, el suceso contrario de A = "las dos bolas son verdes" es A^c = "alguna bola no es verde" = {VR, RV} y su probabilidad es p(A^c) = $\frac{2}{3} = 0,6666... \xrightarrow{.\,100} 66,7\%$, aproximadamente 2/3

2) En un hospital se han producido 200 nacimientos en un mes. De ellos, 105 son varones y, de éstos, 21 tienen los ojos azules. También se ha observado que 57 de las niñas nacidas en ese mes no tienen los ojos azules. *Solución*: Organicemos los datos en una tabla (llamada tabla de contingencia)

	varones	hembras	Total
tienen ojos azules	21	38	59
no tienen ojos azules	84	57	141
Total	105	95	200

Si se elige una persona al azar, usando la tabla, podemos calcular, por ejemplo, las siguientes probabilidades:

p(de que sea hembra) = 95/200 = 0,475 = 47,5%

p(de que sea varón con ojos azules) = 21/200 = 0,105 = 10,5%

p(de que no tenga los ojos azules) = 141/200 = 0,705 = 70,5%

3) En cierta región de España se sabe que la probabilidad de que llueva el viernes es 70%, de que llueva el sábado es 40% y de que llueva el domingo es 80%.
Entonces, por ejemplo, podemos calcular las siguientes probabilidades:

p(de que llueva el fin de semana) = 0,7 . 0,4 . 0,8 = 0,224 = 22,4%

p(de que llueva el viernes, el domingo y no el sábado) = 0,7 . 0,8 . 0,6 = 0,336 = 33,6%

ACTIVIDADES

1.- En un instituto el 32% de los alumnos repite curso. Si se elige un alumno al azar cual es la probabilidad de que no sea repetidor.

2.- En una caja hay 4 bolas blancas, 7 negras y 5 azules. Se saca una bola al azar, halla la probabilidad de que: a) sea negra b) sea azul o negra c) no sea azul d) sea roja e) sea blanca, negra o azul

3.- Sacamos al azar una bola de una bolsa que contiene 10 bolas numeradas del 1 al 10.
Sean los sucesos A = "salir un número mayor que 7" B = "salir un múltiplo de 4"
a) Determina los sucesos A, B y sus contrarios
b) Halla la probabilidad de cada uno de los sucesos del apartado anterior
c) Explica si los sucesos A y B son compatibles o incompatibles

4.- Una bolsa tiene 8 bolas numeradas del 1 al 8. Si se saca al azar una bola, calcula la probabilidad de que el número obtenido: a) sea mayor que 5 b) sea múltiplo de 3 o de 4
c) sea menor o igual que 3 d) no sea primo y sea múltiplo de 3

5.- Se saca al azar una carta de la baraja española de 40 cartas. Halla la probabilidad de que la carta:
a) sea de oros b) sea una figura c) no sea un as d) sea de copas o de bastos
e) sea de espadas o sea figura f) sea rey o sea de oros
g) sea de oros y caballo h) sea de bastos y no sea figura

6.- Se tiene una caja con 3 bolas rojas, 1 verde y 1 azul. Se sacan sucesivamente dos bolas, sin devolverlas a la bolsa. Determina, usando diagrama de árbol, la probabilidad de que:
a) La 2ª bola sea roja b) La 1ª bola sea verde y la 2ª azul c) ninguna bola sea roja

7.- Si lanzamos un dado 2 veces, ¿qué es más probable que la suma de los puntos sea 6 o que sea 7?

8.- Se lanza una moneda tres veces. Calcula la probabilidad de que:
a) salga exactamente dos veces cara b) no salga ninguna cruz c) salgan por lo menos dos cruces

9.- En un grupo de 600 personas, 240 son hombres. También se sabe que hay 100 hombres que usan gafas y 200 mujeres que no las usan. a) Completa la siguiente tabla

	hombres	mujeres	Total
usan gafas			
no usan gafas			
Total			

b) Se elige una persona al azar. Usando la tabla, calcula las siguientes probabilidades:

1) sea una mujer 2) sea hombre que no usa gafas 3) sea mujer que usa gafas

10.- En un grupo de 25 alumnos, se sabe que 10 son hombres. También se sabe que hay 9 mujeres que aprueban las Matemáticas y 6 hombres que suspenden.

a) Completa la siguiente tabla:

	hombres	mujeres	Total
aprueban			
suspenden			
Total			

b) Se elige una persona al azar. Usando la tabla, calcula el porcentaje de probabilidad de que sea un hombre que aprueba Matemáticas

Actividades del libro: 15 (pág. 301), 17, 20, 21 (pág. 303), 58, 65 (pág. 312) y 69 (pág. 313)