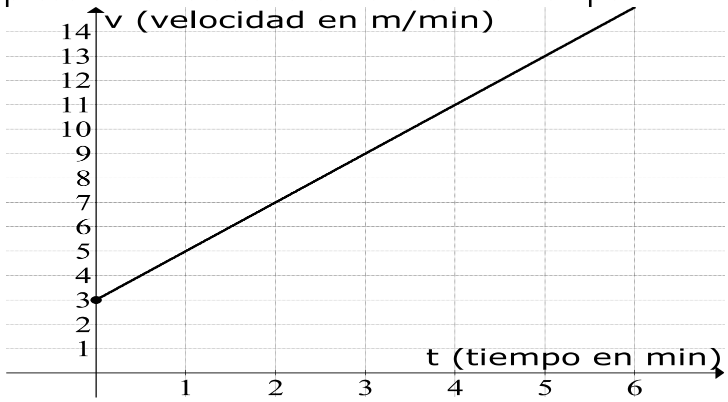
1.- FUNCIONES LINEALES Y AFINES

1.- La siguiente gráfica representa la velocidad en función del tiempo



a) Calcula la pendiente, m, de la recta

b) Indica cuál es la ordenada en el origen, n

c) Halla la fórmula de la función.

d) Determina la velocidad al cabo de 35 min

e) ¿Al cabo de cuánto tiempo la velocidad es de 123 m/min?

Solución

a) Es m = 2 porque cada vez que la x aumenta 1 unidad, la y aumenta 2

b) Es n = 3 porque para x = 0, y = 3

c) Es de la forma y = mx + n $\xrightarrow{\text{sustituyendo } m = 2,\ n = 3}$ y = 2x + 3

d) Como x = 35 → y = 2.35 + 3 = 73 km/h

e) Como y = 123 → 123 = 2x + 3 → 120 = 2x → x = 60 min = 1 h

2.- Un bidón se vacía a razón de 3 litros cada 5 minutos. Al principio tiene 24 litros

a) Completa la siguiente tabla de valores de la función tiempo-litros

x = tiempo (en min)	0	5	10	15
y = litros que hay en el bidón				

b) Dibuja la gráfica de la función

c) Calcula la pendiente, m, de la recta

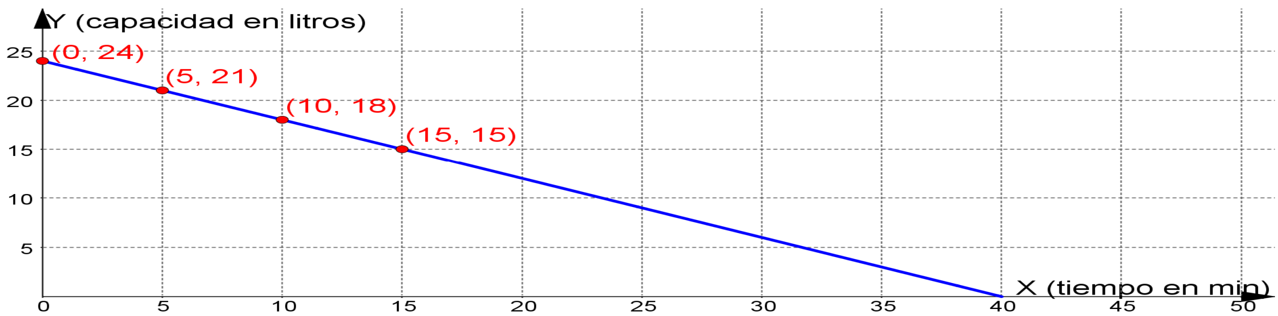
d) Indica cuál es la ordenada en el origen, n

e) Halla la fórmula de la función.

Solución

x = tiempo (en min)	0	5	10	15
y = litros que hay en el bidón	24	21	18	15

b)



c) *Como la recta pasa por* $(0,24)$ *y* $(5,21)$, *la pendiente es* $m = \dfrac{21-24}{5-0} \Rightarrow \boxed{m = -0,6}$

d) Es n = 24 porque para x = 0, y = 24

e) Es de la forma y = mx + n $\xrightarrow{\text{sustituyendo } m = -0{,}6,\ n = 24}$ y = –0,6x + 24

3.- Un sastre, por hacer un traje, cobra 15 € fijos más 10 € por cada metro de tela que utilice.
a) Completa la siguiente tabla:

Metros de tela	0	1	2	3
Precio (en euros)				

b) Halla la pendiente c) Indica cuál es la ordenada en el origen d) Escribe la fórmula de la función
e) Si el sastre ha cobrado 65 €, usa la fórmula para hallar los metros de tela ha utilizado

Solución

a)

Metros de tela	0	1	2	3
Precio (en euros)	15	25	35	45

b) Es m = 10 porque cada vez que la x aumenta 1 unidad, la y aumenta 10

c) Es n = 15 porque para x = 0, y = 15

d) Es de la forma $y = mx + n \xrightarrow{\text{sustituyendo } m=10,\ n=15} y = 10x + 15$

e) Como $y = 65 \rightarrow 65 = 10x + 15 \rightarrow 50 = 10x \rightarrow x = 5$ m

4.- La altura inicial de un líquido contenido en una probeta es 18 cm. Es muy volátil y al evaporarse baja el nivel a razón de 3 cm cada 2 días.
a) Si x = nº de días, y = altura del líquido (en cm), construye una tabla de valores para x = 0, 2 y 4
b) Halla la fórmula de la función que expresa la altura del líquido (y) según del número de días (x).
c) Dibuja la gráfica de la función.
d) ¿Cuánto tiempo debe pasar para que desaparezca el líquido?

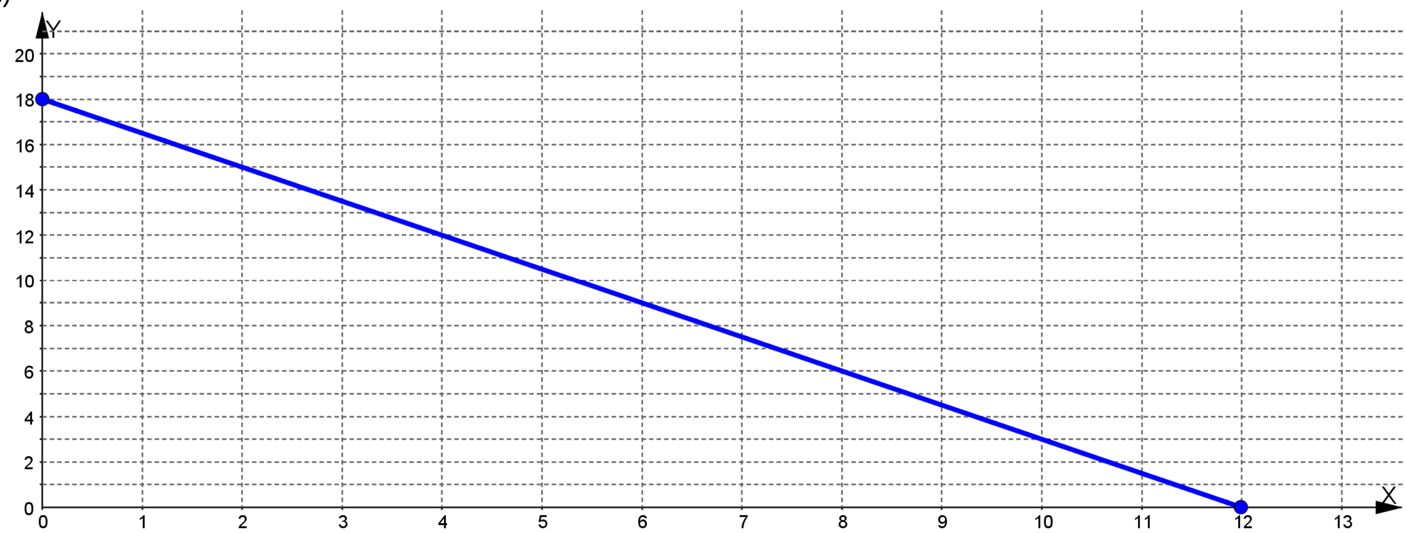
Solución

a)

x	0	2	4
y	18	15	12

b) Como $m = \dfrac{15-18}{2-0} = -1{,}5$ y n = 18 porque para x = 0, y = 18, la fórmula es $y = -1{,}5x + 18$

c)



d) Como $y = 0 \rightarrow 0 = -1{,}5x + 18 \rightarrow 1{,}5x = 18 \rightarrow x = 12$ días

5.- Una pequeña empresa de informática quiere contratar un nuevo vendedor para su tienda. Ofrece una cantidad fija mensual 300 € y 20 € por ordenador vendido. Sea x = nº de ordenadores vendidos, y = dinero que gana en total al mes.
a) Haz una tabla de valores para x = 0, 1 y 2
b) Halla la fórmula de la función que relaciona las variables "x" e "y".
c) Usando la fórmula calcula cuántos ordenadores debería vender al mes para ganar 1200 €

Solución

a)

x	0	1	2
y	300	320	340

b) Como m = 20 porque cada vez que la x aumenta 1 unidad, la y aumenta 20 y n = 300 porque para x = 0, y = 300, la fórmula es y = 20x + 300

c) Como y = 1200 → 1200 = 20x + 300 → 900 = 20x → x = 45 ordenadores

6.- Al apuntarnos en un gimnasio, hemos tenido que pagar una cantidad fija en concepto de matrícula. Después tendremos que ir pagando las mensualidades.
Si estamos 6 meses, nos cuesta en total 246 €, y si estamos 15 meses, nos costará 570 €.
Calcula cuánto nos gastaríamos en total si estuviéramos yendo durante un año

Solución

Sea x = nº de meses, y = precio, en €. La fórmula que relaciona x con y es afín.

Si x = 6 → y = 246. Luego, la recta pasa por el punto A(6, 246)

Si x = 15 → y = 570. Luego, la recta pasa por el punto B(15, 570)

Pendiente de la recta: $m = \dfrac{570 - 246}{15 - 6} = 36$

Ecuación de la recta punto-pendiente: $y = m(x - x_0) + y_0$.

Usamos que la recta pasa por A(6, 246), luego $x_0 = 6$, $y_0 = 246$ y tiene pendiente m = 36

y = 36(x – 6) + 246 → y = 36x + 30

Entonces, como 1 año = 12 meses ⇒ x = 12 → y = 36 . 12 + 30 = 462 €

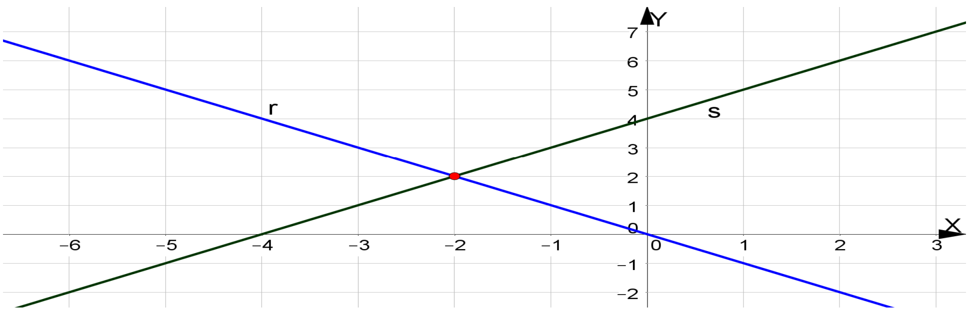
7.- Estudia la posición relativa de las siguientes parejas de rectas. En caso de que sean secantes, calcula el punto de corte y dibújalas en los mismos ejes.

a) r: x + y = 0 s: x – y + 4 = 0 b) r: 2x – y = 3 s: 8x – 4y = 12

Solución

a) *Solución*: $\begin{array}{l} r: y = -x \\ s: y = x + 4 \end{array} \Rightarrow \textit{Las rectas son } \boxed{\textit{secantes}} \textit{ porque tienen distinta pendiente}$

$\begin{cases} y = -x \\ y = x + 4 \end{cases} \Rightarrow -x = x + 4 \Rightarrow -4 = 2x \Rightarrow x = -2 \Rightarrow y = -(-2) = 2.\ \boxed{\textit{Se cortan en el punto } (-2, 2)}$



b) *Solución*: $\begin{array}{l} r: 2x - 3 = y \Rightarrow r: y = 2x - 3 \\ s: 8x - 12 = 4y \Rightarrow y = \dfrac{8x - 12}{4} \Rightarrow s: y = 2x - 3 \end{array}$

Las rectas son $\boxed{\textit{coincidentes}}$ *porque tienen la misma ecuación*

8.- Dos depósitos de agua iguales, A y B, tienen una capacidad para 21 litros.
El depósito A está lleno y se vacía a razón de 2 litros/min.
El depósito B está vacío y se llena con una velocidad de 1,5 litros/min.
Considera la función que relaciona las variables x = tiempo, en minutos, y = volumen, en litros
a) Completa la siguiente tabla

x	0	2	4	6	8	10	fórmula
y (depósito A)							
y (depósito B)							

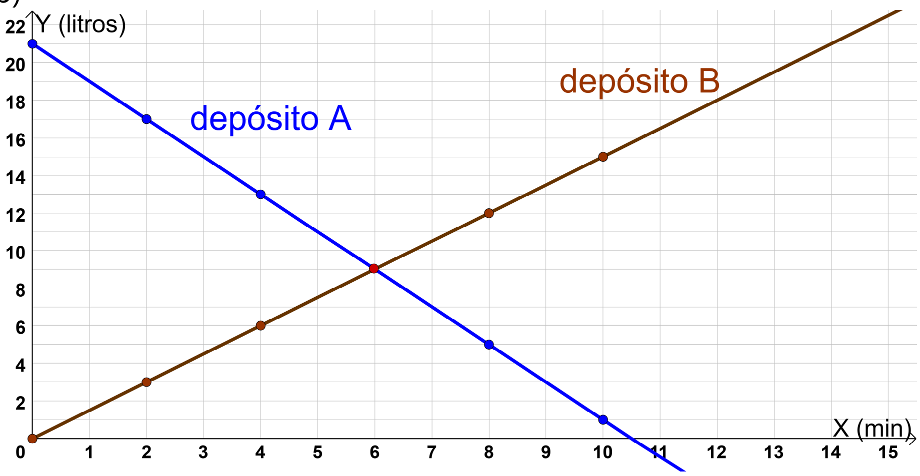
b) Haz la gráfica de las dos funciones usando los datos de la tabla y los mismos ejes de coordenadas
c) ¿En qué minuto los dos depósitos tienen la misma agua?
d) ¿Cuánta agua tienen en ese instante?
e) ¿Cuánto tiempo tarda en llenarse el depósito B?
f) ¿Cuánto tiempo tarda en vaciarse el depósito A?
g) Cuándo el depósito A está vacío, ¿cuántos litros tiene el depósito B?

Solución

a)

x	0	2	4	6	8	10	fórmula
y (depósito A)	21	17	13	9	5	1	y = 21 – 2x
y (depósito B)	0	3	6	9	12	15	y = 1,5x

b)



c) 21 – 2x = 1,5x → 21 = 3,5x → x = 6 min   d) y = 21 – 2.6 = 1,5.6 = 9 litros

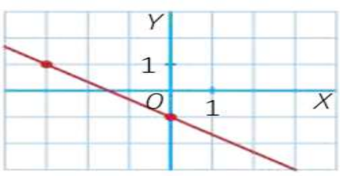
e) 1,5x = 21 → x = 14 min   f) 21 – 2x = 0 → x = 10,5 min

g) x = 10,5 → y = 1,5.10,5 = 15,75 litros

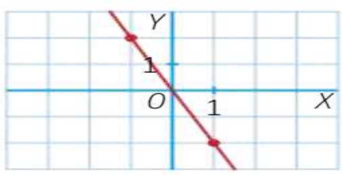
Actividades del libro: 18 (pág. 253), 19 (pág. 254) y 26 (pág. 255)

18. Escribe la ecuación punto-pendiente de las rectas que pasan por los siguientes pares de puntos e indica el valor de la ordenada en el origen.

a)



b)



Solución: a) como la recta r pasa por (–3, 1) y (0, –1) la pendiente es $m = \frac{-1-1}{0-(-3)} = \frac{2}{3} \Rightarrow r: y+1 = \frac{2}{3}(x-0)$

b) como la recta r pasa por (–1, 2) y (1, – 2) la pendiente es $m = \frac{-2-2}{1-(-1)} = -2 \Rightarrow r: y-2 = -2(x+1)$

19. Dados los siguientes pares de rectas, estudia si son paralelas o secantes. Calcula el punto de corte en aquellas que sean secantes.

a) $r: -x + y = 3$
$s: 3x + 2y = -4$

b) $r: 2x + y = 5$
$s: -6x - 3y = 9$

c) $r: -3x + 6y = 4$
$s: 2x - 4y = 7$

d) $r: x + 2y + 1 = 0$
$s: -4y = 8$

Solución: a) $\begin{cases} r: y = x+3 \\ s: y = \dfrac{-3x-4}{2} \end{cases}$ como tienen distinta pendiente, pues $1 \neq \dfrac{-3}{2}$, r y s son secantes. $\begin{cases} y = x+3 \\ y = \dfrac{-3x-4}{2} \end{cases}$

$x+3 = \dfrac{-3x-4}{2} \Rightarrow 2(x+3) = -3x-4 \Rightarrow 5x = -10 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow y = -2+3 = 1$. Se cortan en $P(-2, 1)$

b) $\begin{cases} r: y = -2x+5 \\ s: y = \dfrac{6x+9}{-3} \rightarrow y = -2x-3 \end{cases}$ como tienen la misma pendiente, que es -2, y $5 \neq -3$, r y s son paralelas.

c) $\begin{cases} r: y = \dfrac{3x+4}{6} \rightarrow y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{2}{3} \\ s: y = \dfrac{-2x+7}{-4} \rightarrow y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{7}{4} \end{cases}$ como tienen la misma pendiente, que es $\dfrac{1}{2}$, y $\dfrac{2}{3} \neq \dfrac{-7}{4}$, r y s son paralelas.

d) $\begin{cases} r: y = \dfrac{-x-1}{2} \rightarrow y = \dfrac{-1}{2}x - \dfrac{1}{2} \\ s: y = \dfrac{8}{-4} \rightarrow y = -2 \end{cases}$ como tienen distinta pendiente, pues $\dfrac{-1}{2} \neq 0$, r y s son secantes. $\begin{cases} y = \dfrac{-1}{2}x - \dfrac{1}{2} \\ y = -2 \end{cases}$

$\dfrac{-x-1}{2} = -2 \Rightarrow -x-1 = -2.2 \Rightarrow x = 3$. Se cortan en $P(3, -2)$

26. El entrenador de un corredor está tomándole tiempos y en los primeros 12 s obtiene la siguiente tabla:

Tiempo (s)	0	3	4	6	10	12
Espacio recorrido (m)	0	21	28	42	70	84

Escribe la función que exprese el espacio recorrido en función del tiempo y dibuja su gráfica.

a) ¿Cuántos metros ha recorrido en 5 s?

b) ¿Cuánto tarda en recorrer los primeros 50 m?

Solución: Si x = tiempo (en segundos), y = espacio (en metros) observamos que $y = 7x$

a) $x = 5 \Rightarrow y = 7.5 = 35$ m   b) $y = 50 \Rightarrow 50 = 7x \Rightarrow x = \dfrac{50}{7} \cong 7$ segundos

2.- FUNCIONES CUADRÁTICAS

1.- La temperatura y, en ºC, que adquiere una pieza sometida a un proceso de calentamiento viene dada en función del tiempo x, en horas, por la función: $y = 40x - 10x^2$.

a) Calcula el vértice de la parábola.   b) Halla los puntos de corte de la parábola con el eje X

c) Dibuja la gráfica.

d) Indica en qué momento alcanza la temperatura máxima y cuál es esa temperatura

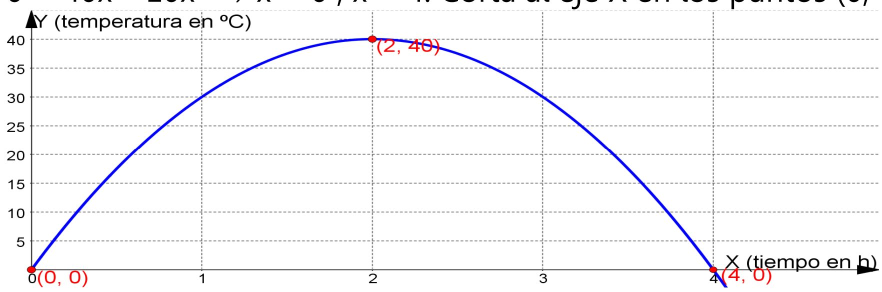
e) Indica en qué horas la temperatura de la pieza es de 0 ºC.

f) ¿En qué momentos la temperatura es de 35 ºC? (redondea a las décimas)

Solución

a) $V(x_v, y_v)$: $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-40}{2.(-10)} = 2$, y_v = imagen de 2 = $40.2 - 10.2^2 = 40 \rightarrow V(2, 40)$

b) $0 = 40x - 10x^2 \Rightarrow x = 0$, $x = 4$. Corta al eje X en los puntos (0, 0) y (4, 0)

c)


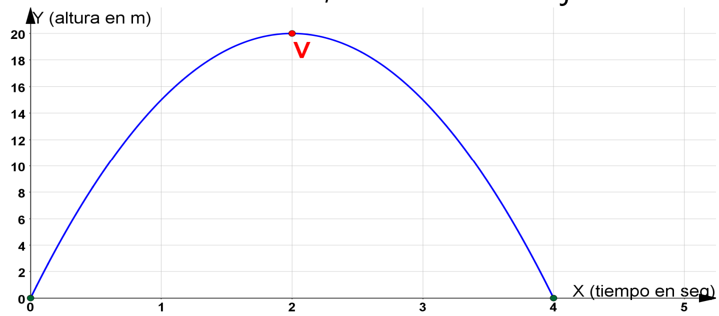
d) A las 2 h, 20 ºC   e) A las 0 h y a las 4 h   f) $35 = 40x - 10x^2 \rightarrow x \approx 2,7$ h , $x \approx 1,3$ h

2.- Se lanza una pelota desde al suelo hacía arriba. Se sabe que la altura que alcanza viene dada por la función $y = 20x - 5x^2$, siendo x = tiempo en segundos, y = altura en metros.
a) Calcula el vértice de la parábola. b) Halla los puntos de corte de la parábola con el eje X
c) Dibuja la gráfica. d) Indica en qué momento alcanza la altura máxima y cuál es esa altura
e) Indica en qué segundos la altura de la pelota es 0.
f) ¿En qué momentos la pelota está a 6 m de altura? (redondea a las décimas)

Solución

a) $V(x_v, y_v)$: $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-20}{2.(-5)} = 2$, y_v = imagen de 2 = $20.2 - 5.2^2 = 20 \rightarrow V(2, 20)$

b) $0 = 20x - 5x^2 \Rightarrow x = 0$, $x = 4$. Corta al eje X en los puntos (0, 0) y (4, 0)

c)


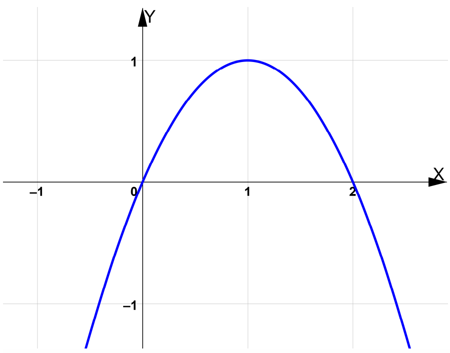
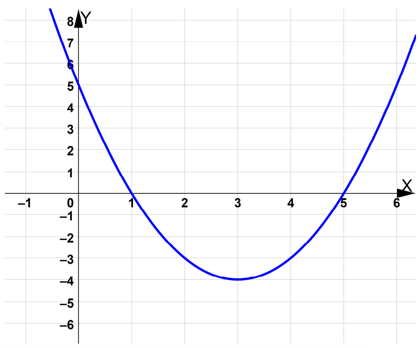
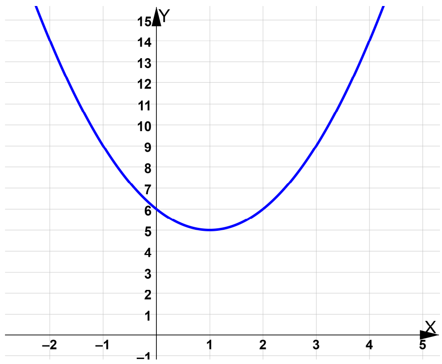
d) A los 2 seg, 20 m e) A las 0 seg y a las 4 seg f) $6 = 20x - 5x^2 \rightarrow x \approx 3{,}7$ seg , $x \approx 3{,}3$ seg

Actividades del libro: 42 (pág. 259), 47 (pág. 260) y 86 (pág. 266)

42. Dibuja las parábolas:

a) $y = -x^2 + 2x$ b) $y = x^2 - 6x + 5$ c) $y = x^2 - 2x + 6$

Solución

47. La función que representa el beneficio obtenido por una empresa si vende x unidades de uno de sus productos es $f(x) = -70x^2 + 2800x - 45\,000$. ¿Cuántas unidades tiene que vender para maximizar sus beneficios?

Solución: como la gráfica es una parábola cóncava (∩), el vértice es el máximo

$x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2800}{2(-70)} = 20 \Rightarrow$ Debe vender 20 unidades

86. Halla dos números cuya suma sea 20 y tales que el cuadrado de uno más el doble del otro sea mínimo.

Solución: 1er número: x 2º número: 20 – x. Función a minimizar: $f(x) = x^2 + 2(20 - x) = x^2 - 2x + 40$
como la gráfica es una parábola convexa (∪), el vértice es el mínimo

$x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2}{2.1} = 1 \Rightarrow$ Los números son 1 y 19