1.- FUNCIONES LINEALES Y AFINES

Funciones lineales

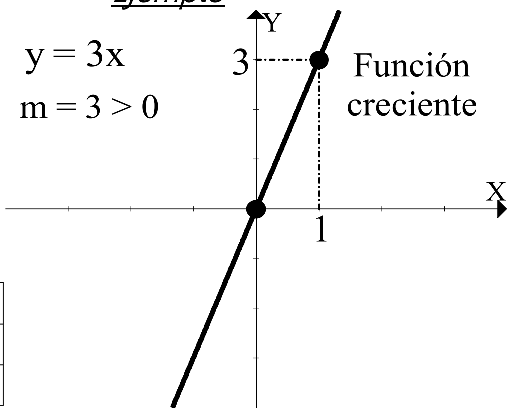
Son aquellas cuya fórmula es del tipo $y = mx$, siendo $m \neq 0$. Por ejemplo, $y = 3x$, $y = -2x$ son funciones lineales.

La gráfica de las funciones lineales es una recta que pasa por el origen de coordenadas O(0, 0), porque en la fórmula si $x = 0 \rightarrow y = m.0 = 0$.
Para dibujar la gráfica de las funciones lineales sólo necesitamos calcular otro punto distinto del (0, 0)

El coeficiente de la x, es decir m, se llama pendiente de la recta y nos indica la inclinación de la recta:

- Si $m > 0$ la recta está inclinada hacia la derecha y, por tanto, la función es creciente.

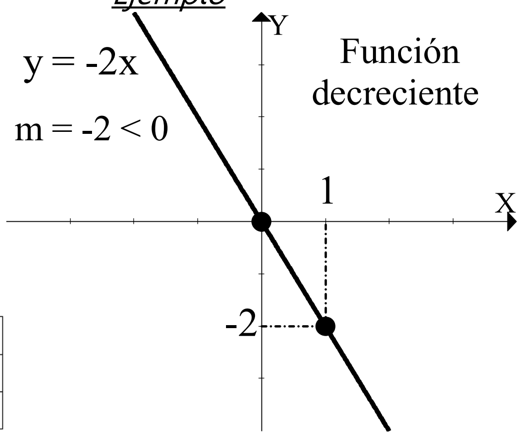
Ejemplo



x	y = 3x
0	0
1	3

- Si $m < 0$ la recta está inclinada hacia la izquierda y, por tanto, la función es decreciente

Ejemplo



x	y = – 2x
0	0
1	– 2

Hay que tener en cuenta que cuanto mayor es la pendiente, en valor absoluto, mayor es la inclinación de la recta. Por ejemplo, la recta $y = -7x$ tiene mayor inclinación que la recta $y = -4x$ porque $7 > 4$.

Funciones afines no constantes

Son aquellas cuya fórmula es del tipo $y = mx + n$, siendo $m, n \neq 0$.
Por ejemplo, $y = 2x - 5$, $y = -3x + 1$ son funciones afines no constantes.

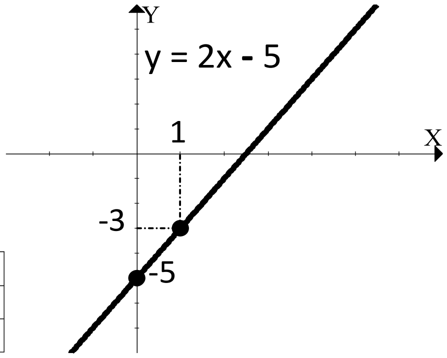
La gráfica de estas funciones es una recta que NO pasa por el origen de coordenadas O(0, 0), pues en la fórmula si $x = 0 \rightarrow y = m.0 + n = n \neq 0$. Luego, la recta para por el punto (0, n)

El coeficiente de la x, es decir m, se llama pendiente de la recta y tiene el mismo significado que en las funciones lineales.

El término independiente, la n, se llama *ordenada en el origen* y como hemos vimos se corresponde con el punto de corte de la recta con el eje Y, pues la recta pasa por el punto (0, n).

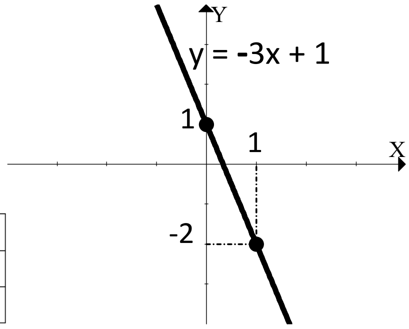
Ejemplos:

x	y = 2x – 5
0	– 5
1	– 3



La pendiente es 2 y la ordenada en el origen –5

x	y = –3x + 1
0	1
1	– 2

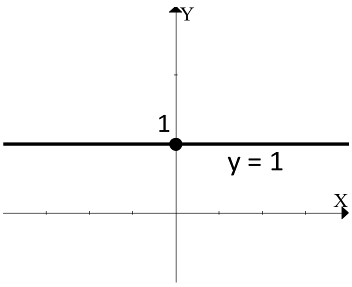


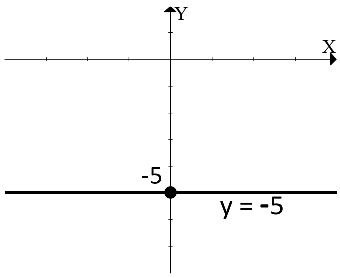
La pendiente es –3 y la ordenada en el origen 1

Funciones constantes

Son aquellas cuya fórmula es del tipo y = n. La gráfica de una función constante es una recta horizontal y su pendiente es cero

Ejemplos





Cálculo del punto de corte de una recta con el eje X

Para calcular el punto donde corta una recta al eje X tenemos que hallar los valores de x que hacen que y sea igual a cero. Para ello, sustituimos en la fórmula de la función la "y" por 0.
Ten en cuenta que si la función es lineal, el punto de corte es el (0, 0) como ya hemos visto.
Si es afín no constante, y = mx + n tendríamos que resolver la ecuación mx + n = 0.

Punto de corte de una recta con el eje Y

Ten en cuenta que si la función es lineal, el punto de corte es el (0, 0) como ya hemos visto y si es afín, y = mx + n ó y = n, el punto de corte es (0, n), como ya hemos visto también.

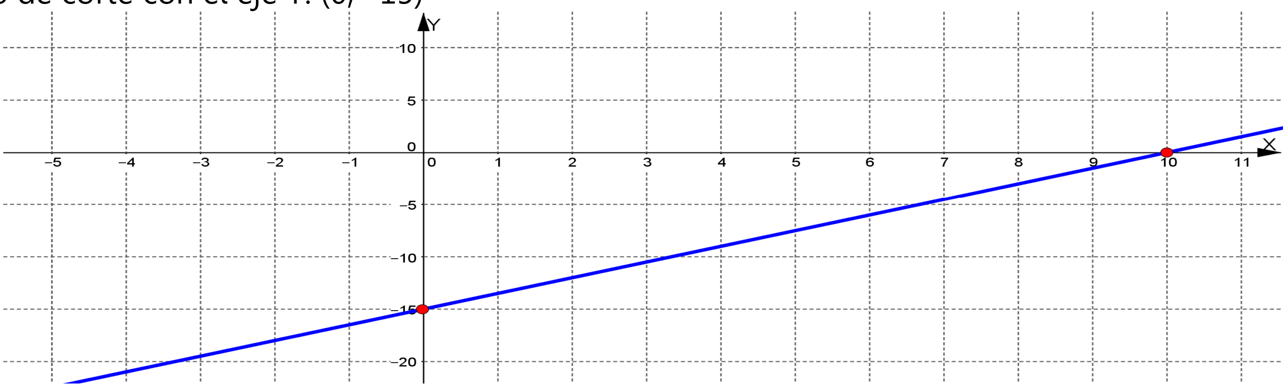
Ejercicio resuelto

Halla los puntos de corte con los ejes de coordenadas y haz la gráfica de la función $f(x)=\frac{3x}{2}-15$

Solución: La fórmula se puede escribir como $y=\frac{3x}{2}-15$

Punto de corte con el eje X: $0=\frac{3x}{2}-15 \xrightarrow{.\,2} 0=3x-30 \rightarrow x=10.$ El punto de corte es (10, 0)

Punto de corte con el eje Y: (0, –15)



Cálculo de la pendiente de una recta

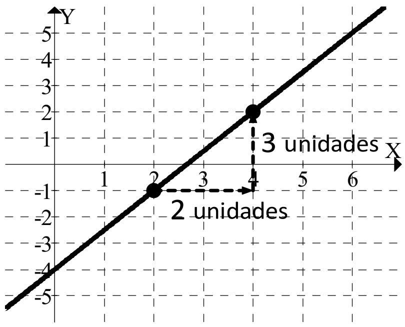
Para calcular la pendiente de una recta se determinan dos puntos de la recta, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y se usa la fórmula:

$$\boxed{\text{Pendiente de la recta} = m = \frac{\text{Variación de y}}{\text{Variación de x}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Ejemplos

1) La pendiente de la recta que pasa por los puntos A(2, – 1) y B(4, 2) es $m = \frac{2-(-1)}{4-2} = \frac{3}{2}$

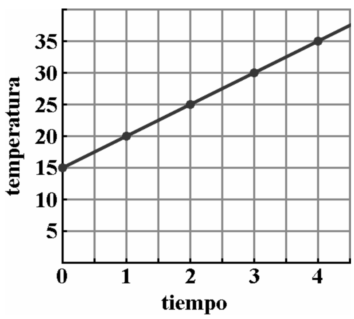
2) La pendiente de la recta dibujada



es $m = \frac{\text{Variación de y}}{\text{Variación de x}} = \frac{3}{2}$

Ejercicios resueltos

1) Se ha medido la temperatura de un gas a medida que se calentaba y se ha obtenido la siguiente gráfica:



El tiempo está dado en minutos y la temperatura en ºC

- La función representada es afín no constante por ser una recta no horizontal que no pasa por (0, 0)
- La pendiente de la recta es m = 5 porque cada vez que la x aumenta 1 unidad, la y aumenta 5
- La ordenada en el origen es n = 15 porque para x = 0, y = 15
- La fórmula de la función es de la forma y = mx + n $\xrightarrow{\text{sustituyendo } m = 5,\, n = 15}$ y = 5x + 15
- Si queremos calcular la temperatura del gas, por ejemplo, a los 10 min, usando la fórmula:
Como x = 10 → y = 5.10 + 15 = 65 ºC

- Si queremos calcular en qué minuto la temperatura del gas es, por ejemplo de 50 ºC usando la fórmula:
Como y = 50 → 50 = 5x + 15 → 35 = 5x → x = 7 min

2) Salomé ha tenido que llamar al fontanero para que revise una gotera que tiene el cuarto de baño. El fontanero cobra 10 € por el desplazamiento y 15 € por cada hora de trabajo.

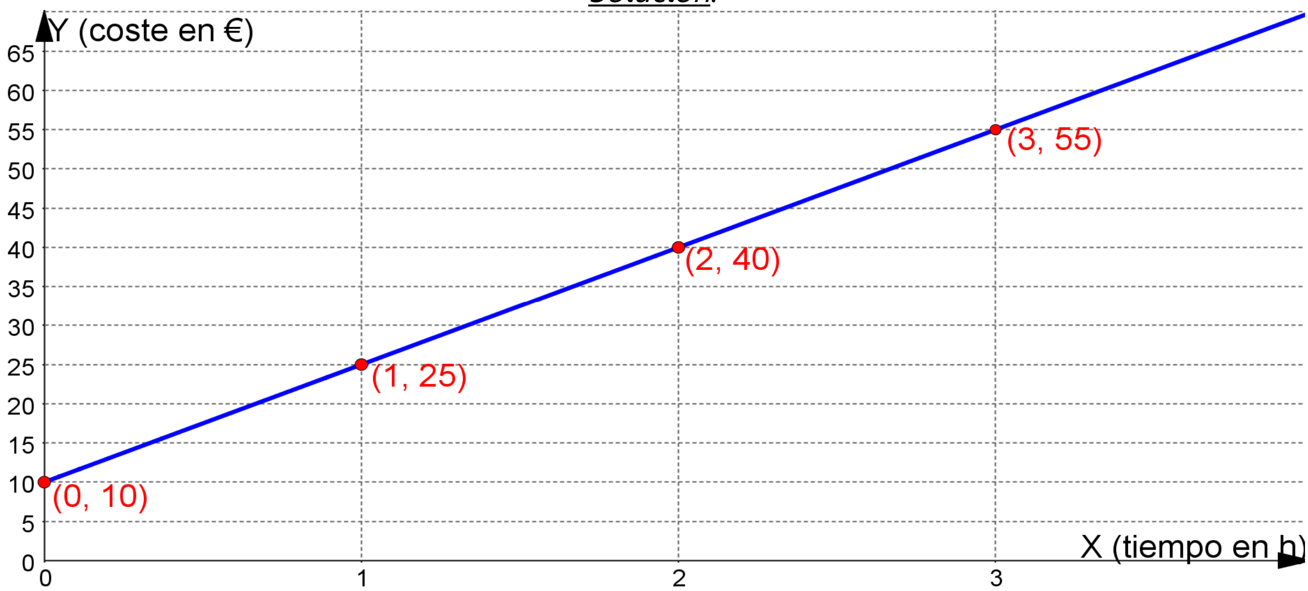
a) Haz una tabla de valores de la función tiempo-coste para 0, 1, 2 y 3 horas:

Solución:

x = tiempo (en h)	0	1	2	3
y = coste (en €)	10	25	40	55

b) Dibuja la gráfica de la función.

<u>Solución</u>:



c) Calcula la pendiente, m, de la recta:
<u>Solución</u>: Es m = 15 porque cada vez que la x aumenta 1 unidad, la y aumenta 15

d) Indica cuál es la ordenada en el origen, n
<u>Solución</u>: Es n = 10 porque para x = 0, y = 10

e) Halla la fórmula de la función
<u>Solución</u>: Es de la forma y = mx + n $\xrightarrow{\text{sustituyendo } m = 15,\ n = 10}$ y = 15x + 10

f) Determina cuál es el coste para 7 horas y media de trabajo:
<u>Solución</u>: Como x = 7,5 → y = 15.7,5 + 10 = 122,50 €

g) Calcula cuántas horas ha trabajado el fontanero si ha cobrado 100 €:
<u>Solución</u>: Como y = 100 → 100 = 15x + 10 → 90 = 15x → x = 6 horas

<u>Ecuación de una recta en forma implícita</u>

La ecuación general de una recta es del tipo ax + by = c, es decir una ecuación lineal con dos incógnitas.

Toda ecuación lineal con dos incógnitas da lugar a una función del tipo y = mx + n

Por ejemplo, la ecuación 3x – 2y = 1, da lugar a la función $y = \frac{3x-1}{2}$, que corresponde a la función afín $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$, cuya pendiente es $\frac{3}{2}$ y ordenada en el origen $\frac{-1}{2}$

<u>Ecuación de una recta en forma punto-pendiente</u>

Si conocemos un punto de la recta $P(x_0, y_0)$ y la pendiente "m" podemos calcular la ecuación de la recta mediante la fórmula: $\boxed{y = m(x - x_0) + y_0}$ llamada <u>ecuación de la recta en forma punto-pendiente</u>

Por ejemplo, si la recta pasa por el punto P(–3, 5) y la pendiente es m = – 2 , la ecuación de la recta es: y = – 2(x + 3) + 5 → y = – 2x – 6 + 5 → y = – 2x – 1 .
En forma general o implícita sería: 2x + y = – 1

Ejercicio resuelto

Un muelle mide 7 cm cuando colgamos de él un peso de 10 gramos y mide 13 cm cuando colgamos de él 80 gramos. Calcula cuánto medirá si colgamos de él 50 gramos. Redondea el resultado a las centésimas.

Solución

Sea x = peso en gramos, y = longitud en cm. La fórmula que relaciona x con y es afín.

Si $x = 10 \rightarrow y = 7$. Luego, la recta pasa por el punto A(10, 7)

Si $x = 80 \rightarrow y = 13$. Luego, la recta pasa por el punto B(80, 13)

Pendiente de la recta: $m = \frac{13-7}{80-10} = \frac{6}{70} = \frac{3}{35}$

Ecuación de la recta punto-pendiente: $y = m(x - x_0) + y_0$. Usamos que la recta pasa por A(10, 7), luego $x_0 = 10$, $y_0 = 7$ y tiene pendiente $m = \frac{3}{35} \Rightarrow y = \frac{3}{35}(x - 10) + 7$

Para 50 gramos $\Rightarrow x = 50 \rightarrow y = \frac{3}{35}(50 - 10) + 7 = \frac{120}{35} + 7 = \frac{73}{7} \cong 10,43$ cm

Resolución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales

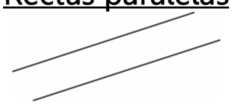
Si tenemos un sistema de ecuaciones, $\begin{cases} y = mx + n \\ y = m'x + n' \end{cases}$ sabemos que cada ecuación se representa por una recta. Luego, se pueden dar los siguientes casos:

Rectas secantes

Este caso se da cuando $m \neq m'$
El sistema de ecuaciones tiene solución única. Es un sistema compatible determinado (SCD). Gráficamente, la solución del sistema corresponde al punto de corte de las rectas.

Ejemplo: $\begin{cases} y = 5x + 3 \\ y = 4x - 1 \end{cases}$

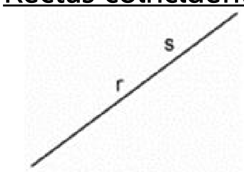
Rectas paralelas



Este caso se da cuando $m = m'$, $n \neq n'$
El sistema de ecuaciones NO tiene solución.
Es un sistema incompatible (SI)

Ejemplo: $\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = 3x \end{cases}$

Rectas coincidentes



Este caso se da cuando $m = m'$, $n = n'$
El sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones.
Es un sistema compatible indeterminado (SCI)

Ejemplo: $\begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$

Resolver un sistema de ecuaciones gráficamente consiste en averiguar cómo son las rectas, de qué tipo es el sistema y, en caso de que sea compatible determinado, dibujar las rectas y hallar la solución.

Ejercicio resuelto

En una empresa tienen que enviar un paquete y para ello comparan las tarifas de dos empresas de mensajería:

· Empresa A: cobra 4 € fijos más 10 céntimos de euro por kilógramo

· Empresa B: cobra 4,50 € fijos más 8 céntimos de euro por kilógramo

a) Obtén en cada caso la fórmula de la función que relaciona x = nº de kg con y = precio a pagar.

Solución: Empresa A: $y = 4 + 0,1x$ Empresa B: $y = 4,5 + 0,08x$

b) Representa gráficamente las dos funciones en los mismos ejes de coordenadas.

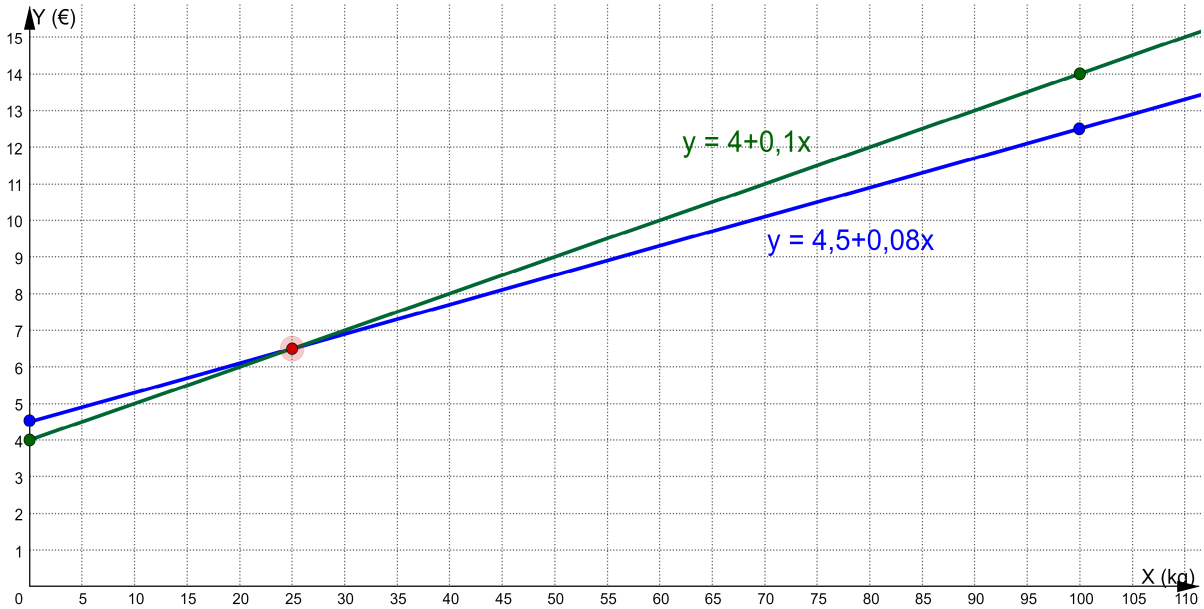
Solución: Formamos una tabla de valores para cada función.

Empresa A :

x	0	100
y = 4 + 0,10x	4	14

Empresa B :

x	0	100
y = 4,5 + 0,08x	4,5	12,5



c) Si el paquete pesa 35 kilógramos, ¿qué empresa elegirías?

Solución

Con la empresa A: x = 35 → y = 4 + 0,1.35 = 7,50 €
Con la empresa B: x = 35 → y = 4,5 + 0,08.35 = 7,30

Eligiría la empresa B, porque me sale un poquito más barato

También lo podríamos haber averiguado usando la gráfica porque para x = 35 la gráfica de la empresa B está por debajo de la de A

d) ¿Cuánto tendría que pesar el paquete para que ambas empresas cobraran lo mismo?

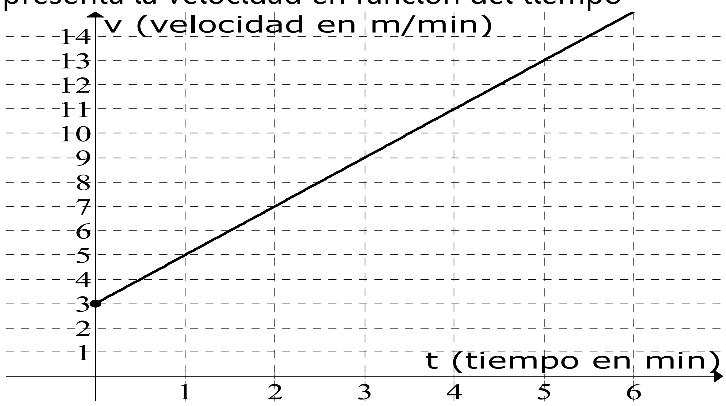
Solución

4 + 0,1x = 4,5 + 0,08x → 0,1x – 0,08x = 4,5 – 4 → 0,02x = 0,5 → x = 25 km

También lo podríamos haber averiguado usando la gráfica porque para x = 25 las gráficas se cortan

ACTIVIDADES

1.- La siguiente gráfica representa la velocidad en función del tiempo



a) Calcula la pendiente, m, de la recta
b) Indica cuál es la ordenada en el origen, n
c) Halla la fórmula de la función.
d) Determina la velocidad al cabo de 35 min
e) ¿Al cabo de cuánto tiempo la velocidad es de 123 m/min?

2.- Un bidón se vacía a razón de 3 litros cada 5 minutos. Al principio tiene 24 litros

a) Completa la siguiente tabla de valores de la función tiempo-litros

x = tiempo (en min)	0	5	10	15
y = litros que hay en el bidón				

b) Dibuja la gráfica de la función c) Calcula la pendiente, m, de la recta

d) Indica cuál es la ordenada en el origen, n e) Halla la fórmula de la función.

3.- Un sastre, por hacer un traje, cobra 15 € fijos más 10 € por cada metro de tela que utilice.

a) Completa la siguiente tabla:

Metros de tela	0	1	2	3
Precio (en euros)				

b) Halla la pendiente c) Indica cuál es la ordenada en el origen d) Escribe la fórmula de la función

e) Si el sastre ha cobrado 65 €, usa la fórmula para hallar los metros de tela ha utilizado

4.- La altura inicial de un líquido contenido en una probeta es 18 cm. Es muy volátil y al evaporarse baja el nivel a razón de 3 cm cada 2 días.

a) Si x = nº de días, y = altura del líquido (en cm), construye una tabla de valores para x = 0, 2 y 4

b) Halla la fórmula de la función que expresa la altura del líquido (y) según del número de días (x).

c) Dibuja la gráfica de la función.

d) ¿Cuánto tiempo debe pasar para que desaparezca el líquido?

5.- Una pequeña empresa de informática quiere contratar un nuevo vendedor para su tienda. Ofrece una cantidad fija mensual 300 € y 20 € por ordenador vendido. Sea x = nº de ordenadores vendidos, y = dinero que gana en total al mes.

a) Haz una tabla de valores para x = 0, 1 y 2

b) Halla la fórmula de la función que relaciona las variables "x" e "y".

c) Usando la fórmula calcula cuántos ordenadores debería vender al mes para ganar 1200 €

6.- Al apuntarnos en un gimnasio, hemos tenido que pagar una cantidad fija en concepto de matrícula. Después tendremos que ir pagando las mensualidades.

Si estamos 6 meses, nos cuesta en total 246 €, y si estamos 15 meses, nos costará 570 €.

Calcula cuánto nos gastaríamos en total si estuviéramos yendo durante un año

7.- Estudia la posición relativa de las siguientes parejas de rectas. En caso de que sean secantes, calcula el punto de corte y dibújalas en los mismos ejes.

a) $r: x + y = 0$ $s: x - y + 4 = 0$ b) $r: 2x - y = 3$ $s: 8x - 4y = 12$

8.- Dos depósitos de agua iguales, A y B, tienen una capacidad para 21 litros.

El depósito A está lleno y se vacía a razón de 2 litros/min.

El depósito B está vacío y se llena con una velocidad de 1,5 litros/min.

Considera la función que relaciona las variables x = tiempo, en minutos, y = volumen, en litros

a) Completa la siguiente tabla

x	0	2	4	6	8	10	fórmula
y (depósito A)							
y (depósito B)							

b) Haz la gráfica de las dos funciones usando los datos de la tabla y los mismos ejes de coordenadas

c) ¿En qué minuto los dos depósitos tienen la misma agua?

d) ¿Cuánta agua tienen en ese instante?

e) ¿Cuánto tiempo tarda en llenarse el depósito B?

f) ¿Cuánto tiempo tarda en vaciarse el depósito A?

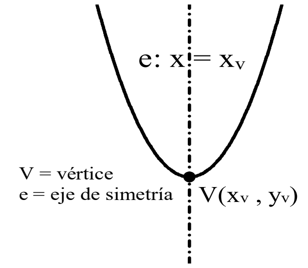
g) Cuándo el depósito A está vacío, ¿cuántos litros tiene el depósito B?

Actividades del libro: 18 (pág. 253), 19 (pág. 254) y 26 (pág. 255)

2.- FUNCIONES CUADRÁTICAS

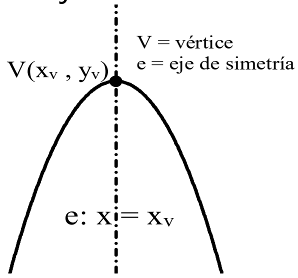
Las funciones cuadráticas son aquellas cuya fórmula viene dada por un polinomio de 2º grado. Estas funciones se pueden expresar de la forma $y = ax^2 + bx + c$, siendo $a \neq 0$. Su gráfica es una parábola.

- Si **a > 0**, la parábola tiene las ramas hacía arriba. Decimos entonces que la función es convexa



El vértice V es un mínimo relativo y absoluto de la función

- Si **a < 0**, la parábola tiene las ramas hacía abajo. Decimos entonces que la función es cóncava



El vértice V es un máximo relativo y absoluto de la función

Para calcular los puntos de corte de la parábola con el eje X, resolvemos la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Si la ecuación no tuviese solución, entonces la parábola no corta al eje X

El punto donde corta la parábola al eje Y es (0, c)

El *vértice* de la parábola, $V(x_v, y_v)$, se calcula con las fórmulas: $\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{x_v = \dfrac{-b}{2a}} \\ \mathbf{y_v = f(x_v)} \end{array}}$, $f(x_v)$ es la imagen de x_v

OBSERVACIÓN IMPORTANTE: para dibujar una parábola es imprescindible representar el vértice y al menos un punto de la parábola a la derecha y otro a la izquierda del vértice

Ejercicios resueltos

1) Haz la gráfica de la función $y = x^2 - 2x - 3$

Solución: $a = 1$, $b = -2$, $c = -3$. La parábola tiene forma de U

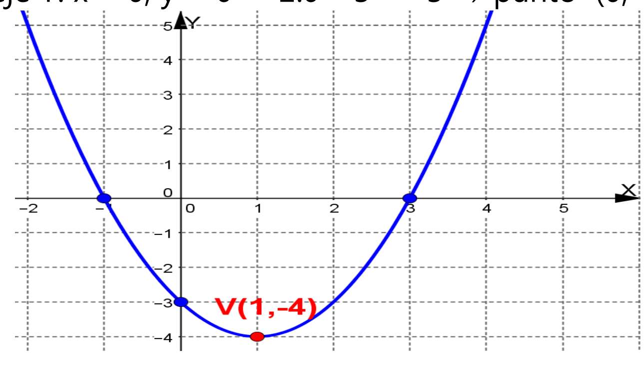
- Se calcula el vértice $V(x_v, y_v)$: $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2}{2.1} = 1$, y_v = imagen de 1 = $1^2 - 2.1 - 3 = -4 \rightarrow V(1, -4)$

- Se calculan los puntos de corte con los ejes:

* Puntos de corte con el eje X: Como en el eje X, la $y = 0 \Rightarrow 0 = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow x = -1, x = 3$

Luego, la parábola corta al eje X en los puntos (–1, 0) y (3, 0)

* Punto de corte con el eje Y: $x = 0$, $y = 0^2 - 2.0 - 3 = -3 \Rightarrow$ punto (0, –3)



2) Haz la gráfica de la función $y = x^2 - 2x + 3$

Solución: $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$. La parábola tiene forma de U

- Se calcula el vértice $V(x_v, y_v)$: $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2.1} = 1$, y_v = imagen de 1 = $1^2 - 2.1 + 3 = 2$ $\rightarrow$ V(1, 2)

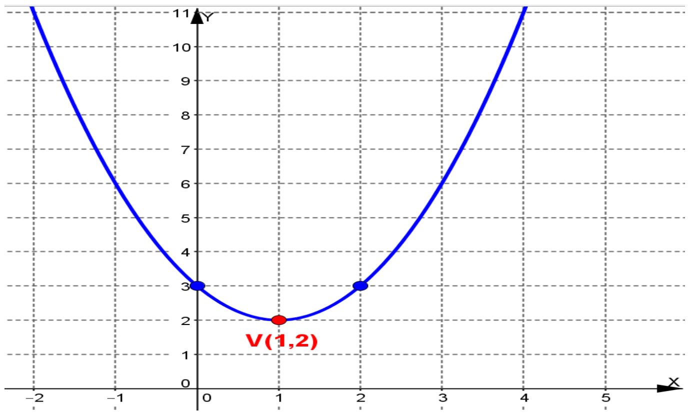
- Se calculan los puntos de corte con los ejes:

* Puntos de corte con el eje X: Como en el eje X, la $y = 0 \Rightarrow 0 = x^2 - 2x + 3 \Rightarrow$ no tiene solución
Luego, la parábola no corta al eje X.

* Punto de corte con el eje Y: $x = 0$, $y = 0^2 - 2.0 + 3 = 3 \Rightarrow$ punto (0, 3)

Como necesitamos más puntos para dibujar la parábola, se hace una tabla de valores tomando valores de la x a la izquierda y a la derecha de $x_v = 1$

x	$y = x^2 - 2x + 3$	Punto
0	$0^2 - 2.0 + 3 = 3$	(0, 3)
2	$2^2 - 2.2 + 3 = 3$	(2, 3)



3) Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba de modo que la altura "y" (en metros) a la que se encuentra en cada instante "x" (en segundos) viene dada por la expresión $y = 40x - 5x^2$

a) Calcula el vértice de la parábola.

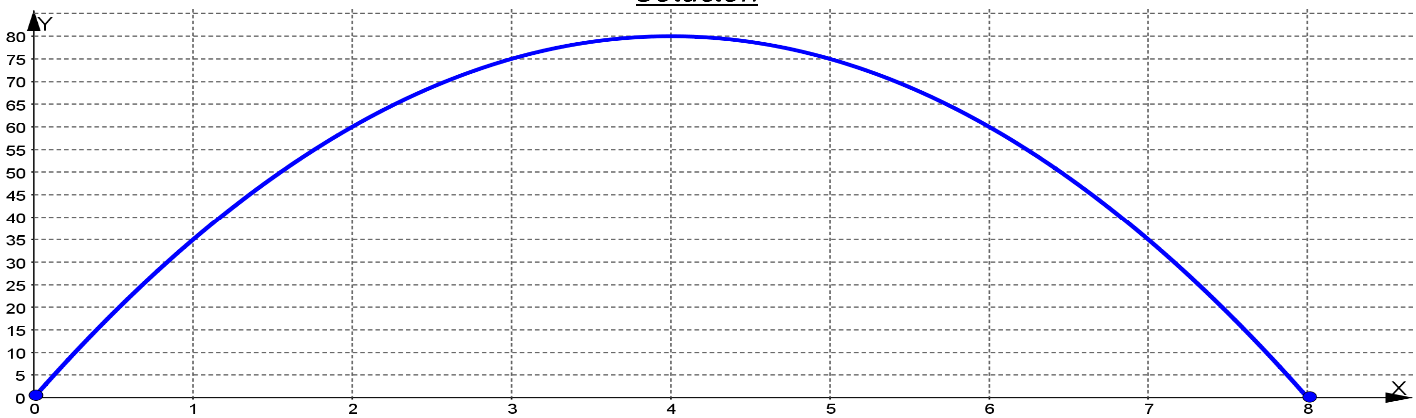
Solución: $V(x_v, y_v)$: $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-40}{2.(-5)} = 4$, y_v = imagen de 4 = $40.4 - 5.4^2 = 80$ $\rightarrow$ V(4, 80)

b) Halla los puntos de corte de la parábola con el eje X :

Solución: $0 = 40x - 5x^2 \Rightarrow x = 0$, $x = 8$. Corta al eje X en los puntos (0, 0) y (8, 0)

c) Dibuja la gráfica de la función.

Solución



d) Indica la altura máxima que alcanza el objeto y en qué segundo la alcanza.

Solución: 80 m, a los 4 seg

e) ¿En qué segundo llega el objeto al suelo? *Solución*: En el segundo 8

f) ¿En qué momentos el objeto se encuentra a 50 m de altura?

Solución: $50 = 40x - 5x^2 \rightarrow 5x^2 - 40x + 50 = 0 \rightarrow x^2 - 8x + 10 = 0 \rightarrow$ $x \approx 6{,}5$ seg , $x \approx 1{,}6$ seg

4) Un agente comercial cobra por la venta de un cierto producto una comisión que viene dada por la expresión $C(x) = 100 + \frac{x}{100} - \frac{x^2}{1000}$ €, donde x representa la cantidad, en miles de euros, de la venta efectuada. Determina la cantidad que habrá que vender para que la comisión sea máxima.

Solución

Tenemos que hallar el máximo que corresponde al vértice de la parábola pues la parábola es cóncava al ser a = –1/1000 (negativo). Concretamente nos piden xv: $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{\frac{-1}{100}}{2.\frac{-1}{1000}} = \frac{-1000}{-200} = 5$

Luego, habrá que vender por una cantidad de 5 000 €

5) ¿Cuáles son las dimensiones de una parcela rectangular de perímetro 80 m y área máxima? (Recuerda que los cuadrados también son rectángulos).

Solución

base: x altura: b. Como P = 80 → 2x + 2b = 80 → x + b = 40 → b = 40 – x

Área = y = base . altura → y = x(40 – x) = 40x – x^2

Tenemos que hallar el máximo que corresponde al vértice de la parábola pues la parábola es cóncava al ser a = –1 (negativo). Concretamente nos piden x_v: $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-40}{2.(-1)} = 20$

Luego, base: x = 20 altura: b = 40 – x = 40 – 20 = 20. La solución es un cuadrado 20 m de lado

ACTIVIDADES

1.- La temperatura y, en ºC, que adquiere una pieza sometida a un proceso de calentamiento viene dada en función del tiempo x, en horas, por la función: $y = 40x - 10x^2$.

a) Calcula el vértice de la parábola. b) Halla los puntos de corte de la parábola con el eje X

c) Dibuja la gráfica.

d) Indica en qué momento alcanza la temperatura máxima y cuál es esa temperatura

e) Indica en qué horas la temperatura de la pieza es de 0 ºC.

f) ¿En qué momentos la temperatura es de 35 ºC? (redondea a las décimas)

2.- Se lanza una pelota desde al suelo hacía arriba. Se sabe que la altura que alcanza viene dada por la función $y = 20x - 5x^2$, siendo x = tiempo en segundos, y = altura en metros.

a) Calcula el vértice de la parábola. b) Halla los puntos de corte de la parábola con el eje X

c) Dibuja la gráfica. d) Indica en qué momento alcanza la altura máxima y cuál es esa altura

e) Indica en qué segundos la altura de la pelota es 0.

f) ¿En qué momentos la pelota está a 6 m de altura? (redondea a las décimas)

Actividades del libro: 42 (pág. 259), 47 (pág. 260) y 86 (pág. 266)