

1.- REPASO: CONCEPTO DE FUNCIÓN

Definición de función

Una función es una forma de hacerle corresponder a un número cualquiera "x" otro número "y".

Lo que vale la "y" depende de lo que vale la "x".

La "y" se llama variable dependiente y la "x" variable independiente.

Formas de expresar una función

Con una fórmula

La fórmula $y = 3x + 7$ representa una función, pues a un valor determinado de "x" le corresponde un sólo valor de "y".

Por ejemplo, para $x = 4 \rightarrow y = 3 \cdot 4 + 7 = 19$.

Se dice que 4 es el original y 19 es la imagen de 4. Si se le llama f a la función, la fórmula se puede escribir también así: $f(x) = 3x + 7$

Con un enunciado

En una tienda el jamón está a 9 €/kg. El precio que tengo que pagar depende de la cantidad de kilogramos.

En este ejemplo, "x" es la cantidad de kg que compramos e "y" es el precio que pagamos.

Con una tabla

Ejemplo ▶ Luisa prepara un informe sobre cómo varía la temperatura el primer día de primavera. Ha ido anotando la temperatura cada dos horas en esta tabla:

Hora	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Temperatura (°C)	7	5	5	4	5	11	15	17	19	19	18	12	9

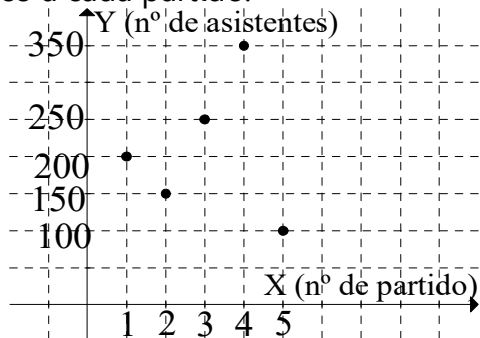
Se observa una correspondencia entre la hora, h, y la temperatura, T.

El conjunto inicial está formado por las horas y el conjunto final está formado por las distintas temperaturas.

A cada hora le corresponde una única temperatura, por lo que la correspondencia es una función. Se dice que **la temperatura está en función del tiempo**.

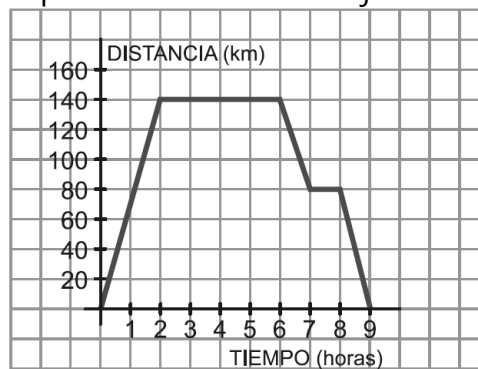
Con una gráfica

En un pueblo se juegan 5 partidos de fútbol. La siguiente gráfica representa la asistencia de público a cada partido.



La "x" toma valores aislados y por eso la gráfica está formada sólo por puntos aislados. Este tipo de funciones se llaman funciones de variable discreta.

La siguiente gráfica corresponde a la distancia recorrida por un coche en un viaje



En este ejemplo, "x" es el tiempo e "y" es la distancia. La "x" puede tomar cualquier valor. Este tipo de funciones se llaman funciones de variable continua.

Ejercicios resueltos

1) Escribe la fórmula de la función en los siguientes casos:

a) A cada número le hacemos corresponder su mitad más cinco. Solución: $y = \frac{x}{2} + 5$

b) A cada valor del lado de un cuadrado le hacemos corresponder su área. Solución: $y = x^2$

c) A un número le hacemos corresponder su inverso menos 4. Solución: $y = \frac{1}{x} - 4$

2) Sea la función $f(x) = \frac{2x+7}{3x-1}$.

a) Calcula $f(5)$. Solución: $f(5) = \frac{2 \cdot 5 + 7}{3 \cdot 5 - 1} = \frac{17}{14}$

b) Halla el valor de x para que $f(x) = -3$.

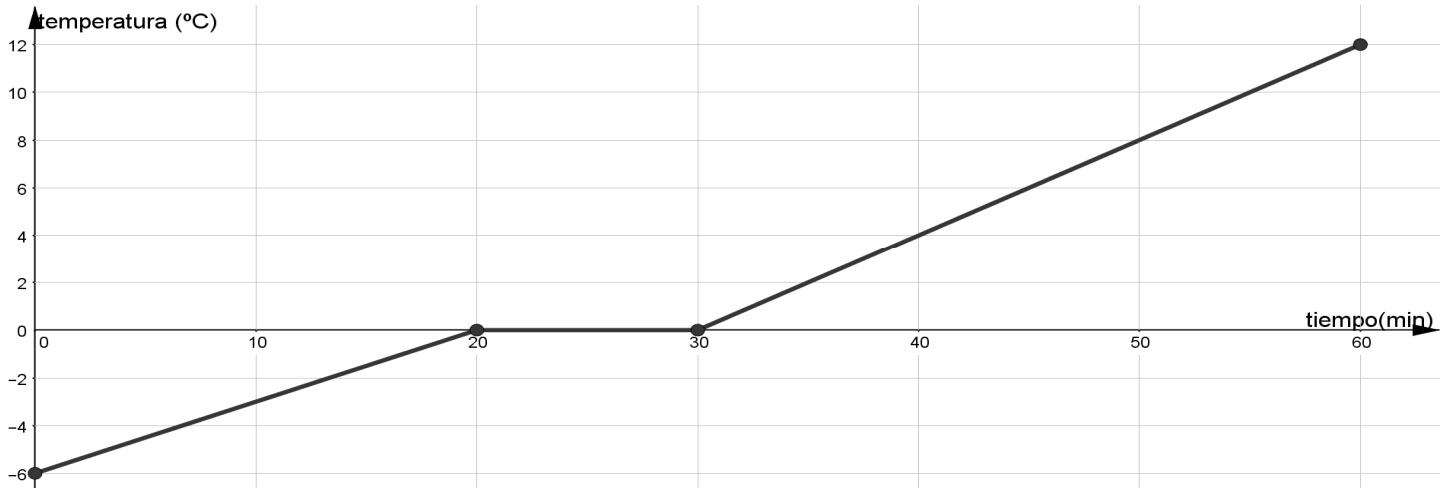
Solución: $f(x) = \frac{2x+7}{3x-1} = -3 \Leftrightarrow 2x+7 = -3(3x-1) \Leftrightarrow 2x+7 = -9x+3 \Leftrightarrow 11x = -4 \Leftrightarrow x = \frac{-4}{11}$

3) Dibuja una gráfica tiempo-temperatura que se ajuste al siguiente enunciado:

"Pedro saca hielo del congelador a -6°C . En 20 minutos, su temperatura alcanza los 0°C .

Esta temperatura se mantiene durante 10 minutos. Después tarda media hora hasta llegar a 12°C "

Solución

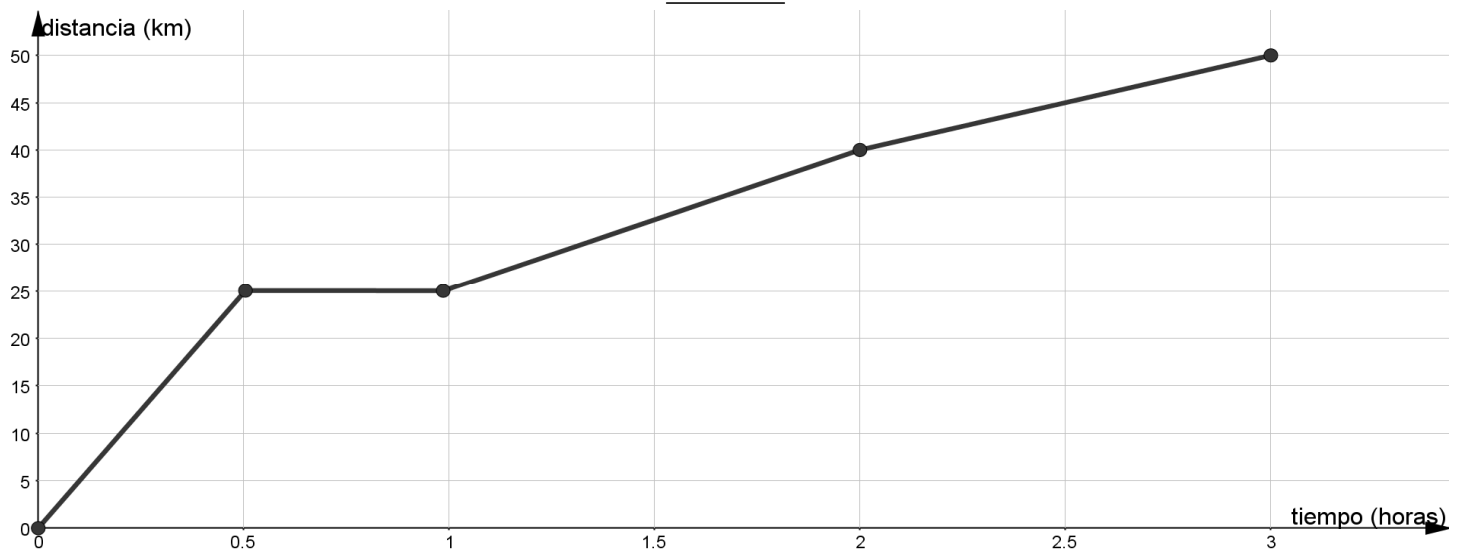


4) Luisa salió de su casa a hacer una ruta en bicicleta. Tardó media hora en llegar al primer punto de descanso, que estaba a 25 km de su casa. Estuvo parada durante 30 minutos.

Tardó 1 h en recorrer los siguientes 15 km y otra hora en recorrer los 10 km que faltaban para llegar a su destino.

a) Representa la gráfica tiempo-distancia a casa.

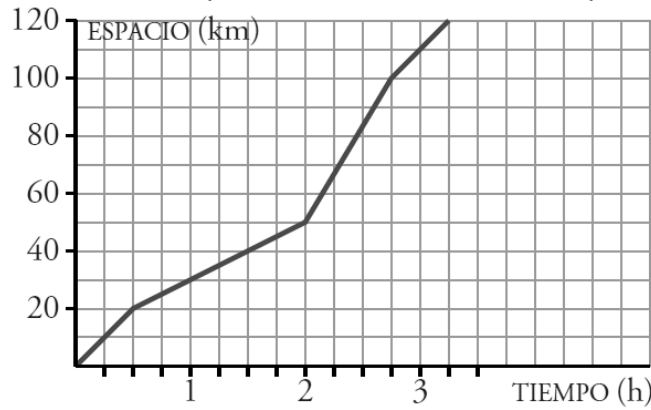
Solución



b) Calcula la velocidad media que llevó en las dos últimas horas

Solución: $v = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{25 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 12,5 \text{ km/h}$

5) Esta gráfica indica el espacio recorrido por un corredor en una etapa de la Vuelta Ciclista a España.



Se suponen los extremos de la gráfica incluidos en la misma. A la vista de la gráfica, determina:

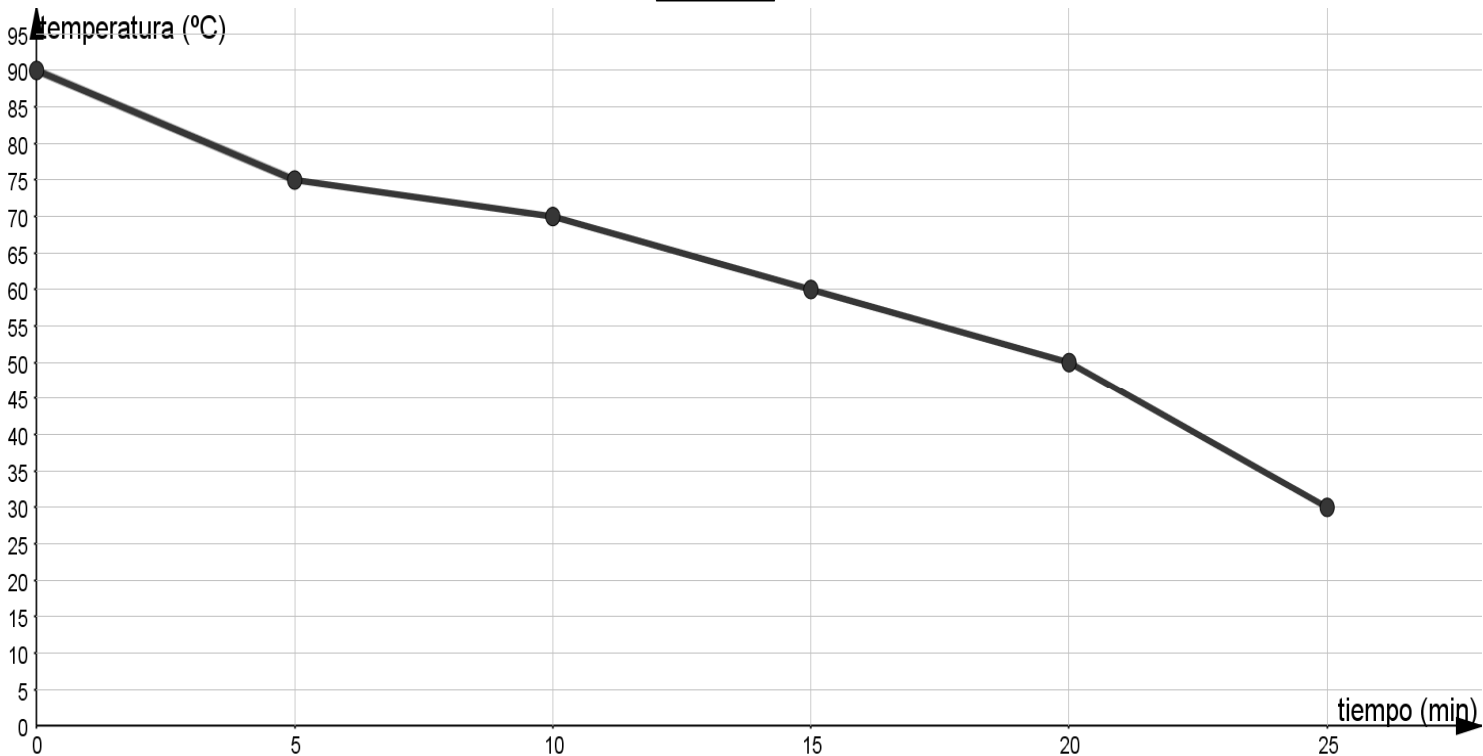
- a) El tiempo que tardó en recorrer los 100 primeros kilómetros. Solución: 2,75 h = 2 h 45 min
- b) El tiempo que dura la etapa. Solución: 3,25 h = 3h 15 min
- c) La distancia que recorrieron los ciclistas. Solución: 120 km
- d) La velocidad media en la primera hora y media, redondeando a las décimas.

Solución: $v = \frac{40 \text{ km}}{1,5 \text{ h}} \cong 26,7 \text{ km/h}$

6) La siguiente tabla nos da la temperatura de una taza de café mientras se enfría

tiempo (min)	0	5	10	15	20	25
temperatura (° C)	90	75	70	60	50	30

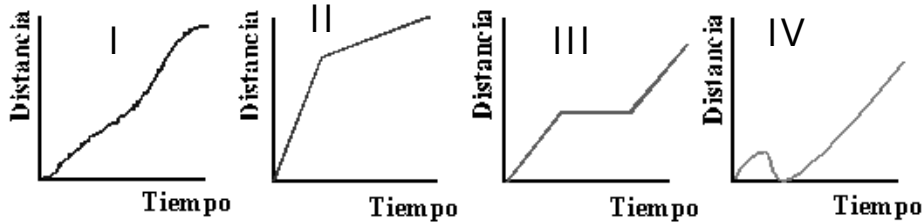
a) Representa gráficamente la función tiempo-temperatura graduando los ejes convenientemente
Solución



b) Explica por qué tiene sentido unir los puntos representados.

Solución: porque tanto el tiempo como la temperatura varían poco a poco y no dando saltos

7) Las siguientes gráficas muestran la distancia a casa cuando van al instituto cuatro amigos. En todas las gráficas se ha utilizado la misma escala.



Fíjate en lo que dice cada uno e indica qué gráfica le corresponde.

(En el eje vertical se representa la distancia a casa)

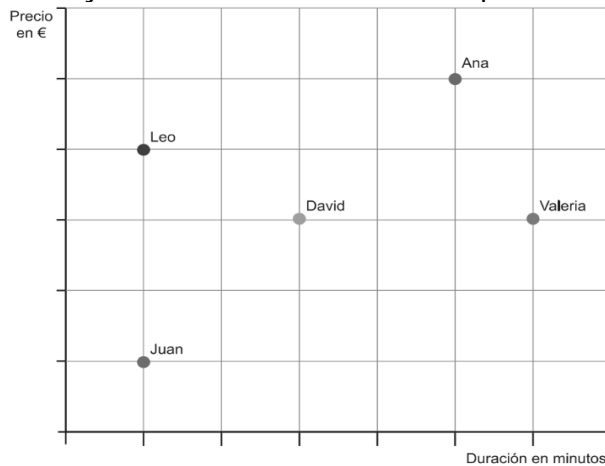
Jorge: Al poco tiempo de salir me di cuenta de que olvidé las zapatillas y tuve que volver. Solución: IV

Lucía: Voy en bici pedaleando fuerte y cuando voy llegando aminoro mi marcha. Solución: I

Carlos: Fui en moto y por el camino me quedé sin gasolina. Así que a pie y andando. Solución: II

Sofía: Voy también en moto pero en mitad del camino me paré a recoger a mi amiga. Solución: III

8) Desde un locutorio Leo, David, Ana, Valeria y Juan han realizado llamadas internacionales a sus respectivos países en la misma franja horaria. Las tarifas de los países son distintas.



Señala si las frases siguientes son verdaderas (V) o falsas (F):

1) Juan pagó más que Valeria. Solución: F 2) David y Valeria pagaron la misma cantidad. Solución: V

3) David pagó menos que Leo. Solución: V 4) Leo se gastó más que Juan. Solución: V

5) La llamada de Ana duró más que la de Valeria. Solución: F

6) La llamada de Leo duró lo mismo que la de Juan. Solución: V

7) Leo se gastó más que Ana. Solución: F

ACTIVIDADES

1.- Escribe la fórmula de la función que corresponde a cada enunciado:

a) A cada número le corresponde el mismo número más dos.

b) A cada número le corresponde su doble. c) A cada número le corresponde su cuadrado menos 5.

d) A cada número le corresponde su inverso.

2.- Considera la función que a cada número x le asigna su triple menos siete.

a) Escribe la fórmula de la función b) Calcula la imagen de -2 c) ¿Qué número tiene de imagen 23?

3.- Sea la función $f(x) = x^2 - 3x + 7$. a) Calcula $f(-4)$ b) Halla los valores de x para los que $f(x) = 5$

4.- Sea la función $f(x) = \frac{2x+7}{3x-1}$. a) Calcula $f(5)$. b) Halla el valor de x para que $f(x) = -3$.

5.- Un científico estuvo observando la temperatura del líquido contenido en un recipiente: "Al principio la temperatura era de 10 °C, al cabo de 20 minutos ya era de 40 °C y se mantuvo constante durante 10 minutos; después tardó 30 minutos para llegar hasta los 5 °C bajo cero". Representa la gráfica tiempo-temperatura graduando los ejes convenientemente.

6.- Un ciclista sale de excursión a un lugar que dista 20 km de su casa. A los 15 minutos de la salida, cuando se encuentra a 6 km, hace una parada de 10 minutos. Reanuda la marcha y llega a su destino una hora después de haber salido de casa.

a) Representa la gráfica tiempo-distancia.

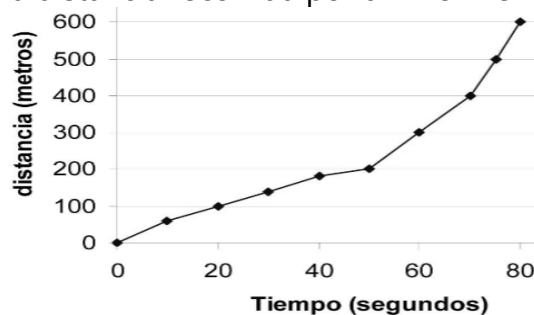
b) Halla la velocidad media que llevó el ciclista (en m/min) durante los 15 primeros minutos

7.- Eva fue a visitar a su amiga Leticia y tardó 20 minutos en llegar a su casa, que se encuentra a 800 metros de distancia. Estuvo allí durante media hora y regresó a su casa, tardando en el camino de vuelta lo mismo que tardó en el de ida

a) Representa la gráfica, tomando el tiempo en el eje X y la distancia a casa en el eje Y

b) Halla la velocidad media que llevó Eva (en m/min) durante los 20 primeros minutos

8.- La siguiente gráfica muestra la distancia recorrida por un móvil en función del tiempo.



A la vista de la gráfica, determina:

a) El tiempo que tardó en recorrer los 300 primeros metros.

b) El tiempo que estuvo en movimiento y la distancia recorrida. c) La velocidad media alcanzada.

9.- Representa gráficamente las siguientes funciones dadas por tablas graduando los ejes convenientemente:

a) Tras nacer un bebé se han anotado sus pesos hasta el tercer mes en una tabla dando los siguientes resultados:

x = tiempo (meses)	0	1	2	3
y = peso (kg)	3,75	4,25	5,60	6,40

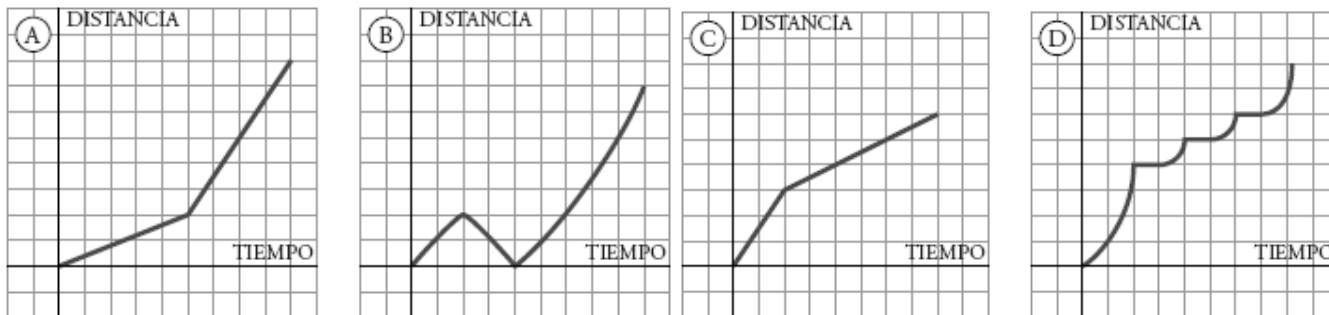
b) La siguiente tabla nos da la temperatura de un líquido mientras se enfría

tiempo (min)	0	5	10	20	30
temperatura (° C)	100	70	40	35	20

c) La siguiente tabla expresa el nº de asistentes cada día en una competición de tenis

Día	1	2	3	4	5	6
Nº de personas	1000	800	400	600	900	1200

10.- Las siguientes gráficas muestran la distancia a casa cuando van al instituto de cuatro amigos. En todas las gráficas se ha utilizado la misma escala



a) Fíjate en lo que dice cada uno e indica qué gráfica le corresponde.

Carmen: Vine en moto; pero se me olvidó un trabajo que tenía que entregar y tuve que volver a casa. Luego corrí todo lo que pude hasta llegar al instituto.

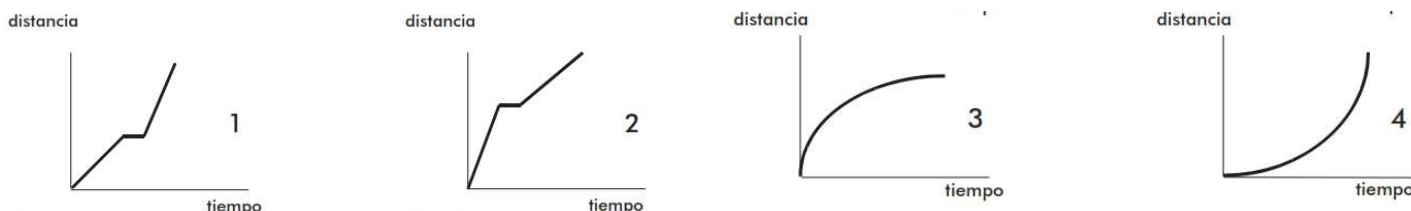
Gonzalo: Mi madre me trajo en coche; pero nos encontramos un atasco en el semáforo que hay a mitad de camino y nos retrasó mucho.

Elena: Me encontré en el portal de mi casa con un amigo que va a otro instituto. Hicimos juntos una parte del camino, y cuando nos separamos tuve que darme más prisa porque, con la charla, se me hizo tarde

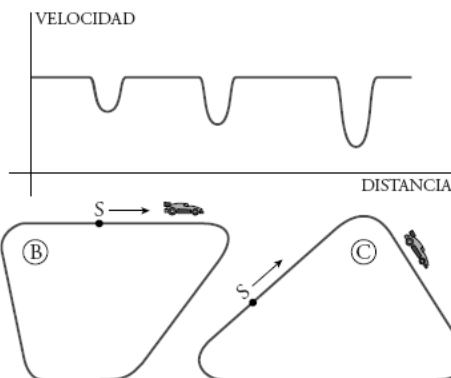
Luís: Salí de casa muy deprisa porque había quedado con María y era tarde. Después hicimos el camino juntos con más calma.

b) ¿Quién vive más cerca del instituto? c) ¿Quiénes tardaron más en llegar?

11.- Alberto sale de su casa para ir al cine. Cree que llega tarde y empieza a correr. Se cansa, para un poco y luego continúa andando hasta llegar. ¿Qué gráfica representa mejor la distancia a casa en la ida al cine de Alberto?



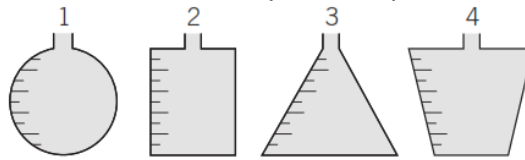
12.- La gráfica distancia-velocidad muestra cómo varía la velocidad de un coche al recorrer uno de los circuitos dibujados más abajo.



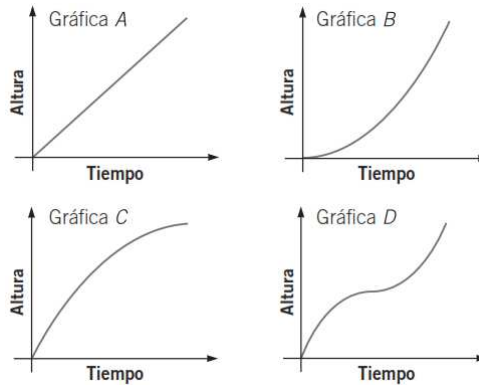
a) ¿A cuál de los dos corresponde?

b) Haz una gráfica distancia-velocidad del otro circuito

13.- Observa los cortes transversales de cuatro recipientes que tienen la misma altura y volumen.



Imagina que llenamos los cuatro recipientes con grifos que llevan el mismo caudal, es decir, con igual velocidad de entrada de agua y, cada minuto, anotamos en una tabla la altura de agua para cada vaso. Una vez completadas las tablas, dibujamos las gráficas correspondientes a cada recipiente: son gráficas tiempo-altura.

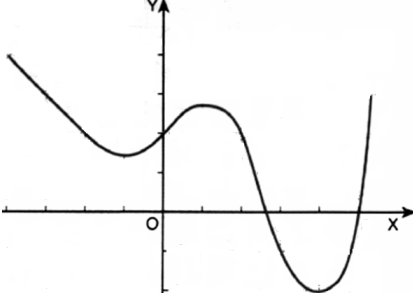
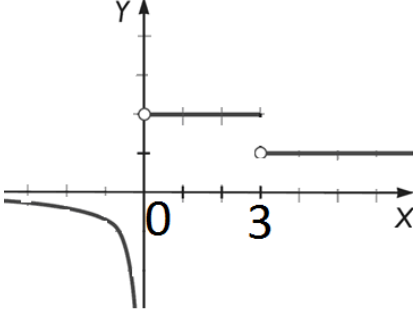


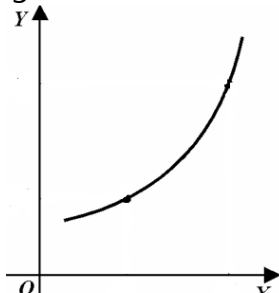
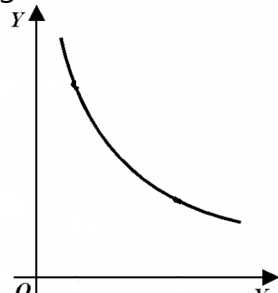
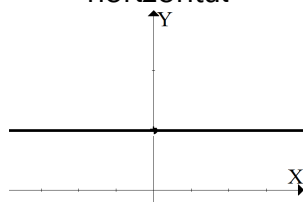
Date cuenta de que todas terminan en el mismo punto ya que, como hemos dicho, tienen la misma altura y volumen. Pero estos recipientes no se llenan de igual forma respecto a la altura. Hay recipientes que al principio alcanzan mucha altura y después cada vez menos, o al revés. ¿Qué gráfica corresponde a cada uno?

2.- CARACTERÍSTICAS DE UNA FUNCIÓN

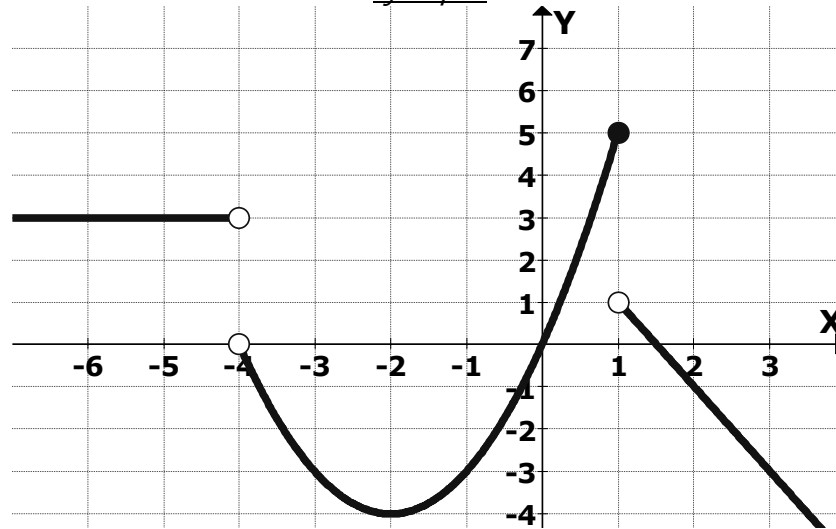
Funciones continuas y discontinuas

Una función es continua cuando su gráfica no tiene ninguna "rotura" y, por tanto, se puede dibujar de un solo trazo. Esto significa que los valores de "y" varían poco a poco a medida que varían los valores de "x"

 <p>Esta gráfica corresponde a una función <u>continua</u></p>	 <p>Esta gráfica corresponde a una función <u>discontinua</u>. Los puntos de discontinuidad son $x = 0$, $x = 3$</p>
---	--

<p>Funciones crecientes Una función es creciente si su gráfica es ascendente.</p> 	<p>Funciones decrecientes Una función es decreciente si su gráfica es descendente.</p> 	<p>Funciones constantes Son las funciones que no son crecientes ni decrecientes. La gráfica es una línea recta horizontal</p> 
--	---	--

Ejemplo



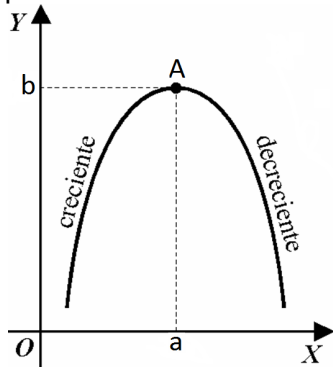
Es creciente desde $x = -2$ hasta $x = 1$ porque la gráfica correspondiente es ascendente.

Es decreciente desde $x = -4$ hasta $x = -2$ y desde $x = 1$ hasta ∞ porque su gráfica es descendente.

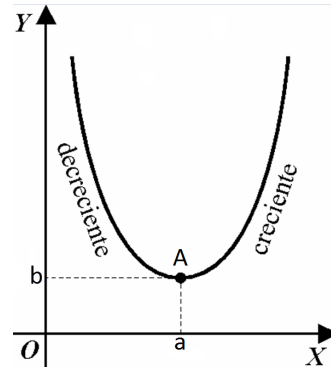
Es constante desde $-\infty$ hasta $x = -4$ porque su gráfica correspondiente es horizontal.

Máximos y mínimos de una función

Una función tiene un máximo relativo en un punto $A(a, b)$ si en dicho punto la función es continua y pasa de creciente a decreciente.



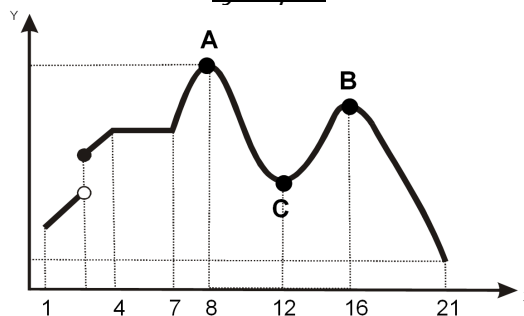
Una función tiene un mínimo relativo en un punto $A(a, b)$ si en dicho punto la función es continua y pasa de decreciente a creciente.



El máximo absoluto es un punto que corresponde al mayor valor de la función, si es que existe.

El mínimo absoluto es un punto que corresponde al menor valor de la función, si es que existe.

Ejemplo

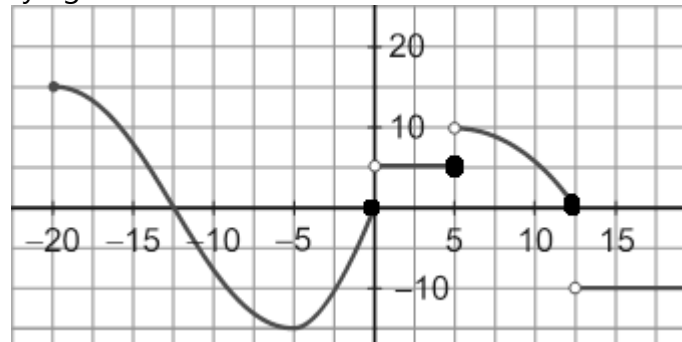


Los máximos relativos son A y B. Además, A es un máximo absoluto.

El mínimo relativo es C. Además, el mínimo absoluto se alcanza para $x = 21$.

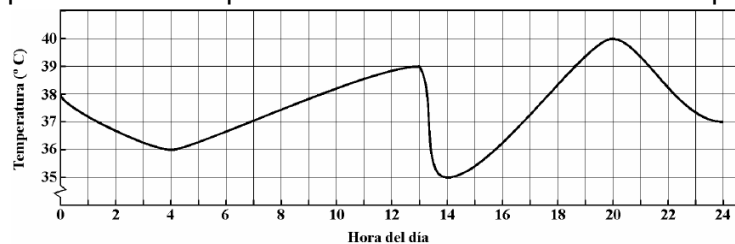
Ejercicios resueltos

1) Considera la función f cuya gráfica es



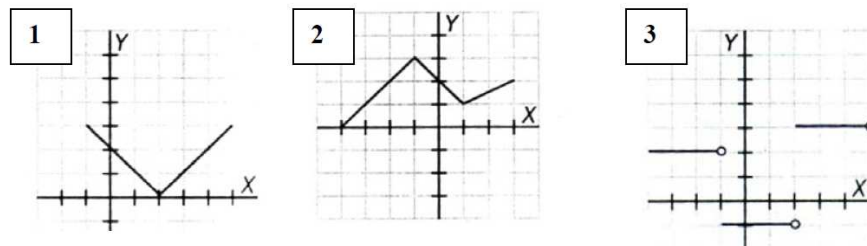
- a) $f(10) = 5$ b) El valor de x para el que la función vale 15 es -20
- c) El tramo donde f es creciente es de -5 a 0
- d) El mínimo relativo y absoluto de f es el punto $(-5, -15)$
- e) No tiene máximo relativo pero si tiene máximo absoluto, que es el punto $(-20, 15)$
- f) Es discontinua en $x = 0$, $x = 5$, $x = 15$

2) La siguiente gráfica representa la temperatura de un enfermo de un hospital a lo largo de un día



(Suponemos los extremos de la gráfica incluidos)

- La temperatura es de 37°C aproximadamente a las 1 h 30 min, a las 7 h, a las 13 h 15 min, a las 16 h 45 min y a las 24 h
- La función es creciente desde 4 hasta 13 y desde 14 hasta 20. Esto significa que el enfermo fue empeorando de las 4 h a las 13 h y desde las 14 h hasta las 20 h
- Los máximos de la función son $(13, 39)$ y $(20, 40)$, este último punto es además un máximo absoluto. Esto significa que a las 13 h y a las 20 h el enfermo tuvo fiebre más alta, a las 13 h tuvo 39°C y a las 20 h tuvo 40°C
- La función es continua lo que significa que la temperatura va subiendo y bajando "poco a poco", sin dar saltos



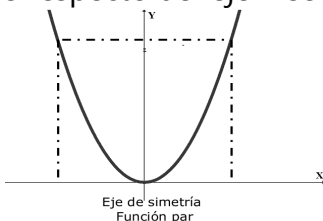
3) Observa las gráficas:

- La que tiene un máximo en el punto $(-1, 3)$ es la gráfica 2
- La que es decreciente desde $x = -1$ hasta $x = 2$ es la gráfica 1
- En la que se cumple que $f(-1) = -1$ y $f(2) = 3$ es en la gráfica 3
- La que es creciente desde $x = -4$ hasta $x = -1$ es la gráfica 2.
- La que no es continua en $x = 2$ es la gráfica 3.
- La que tiene un mínimo en $(2, 0)$ es la gráfica 1

Simetría de una función

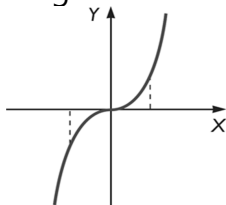
Una función es simétrica respecto de un eje vertical si al doblar la gráfica por dicho eje coincide la parte que hay a la derecha del eje con la de la izquierda.

Las funciones simétricas respecto del eje Y se llaman ***funciones pares***



- Una función es simétrica respecto del origen de coordenadas $O(0, 0)$ si al doblar la gráfica por el eje X se obtiene una gráfica simétrica respecto del eje Y.

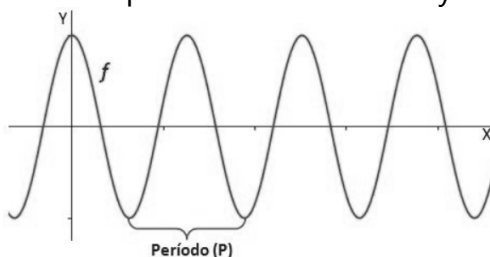
Las funciones simétricas respecto del origen de coordenadas se llaman ***funciones impares***



Periodicidad de una función

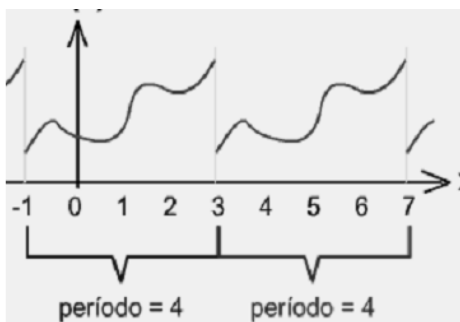
Una función es periódica si su gráfica se va repitiendo cada cierto intervalo del eje X.

La longitud del intervalo se llama periodo de la función y se representa con la letra p.

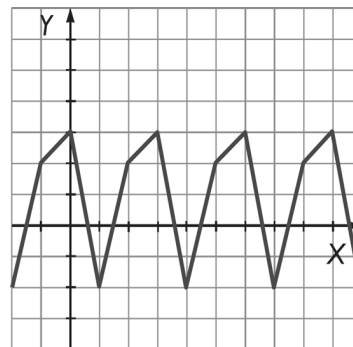


Función periódica de periodo p

Ejemplos.

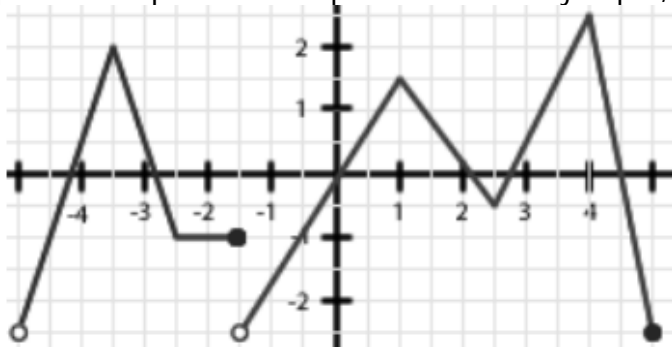


Función periódica de periodo $p = 4$



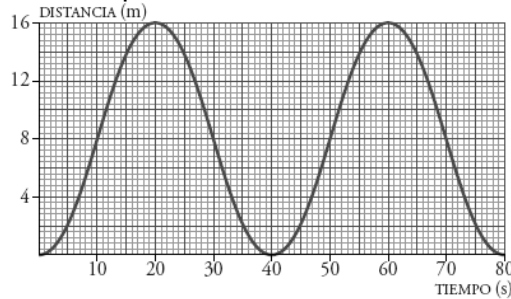
Función periódica de periodo $p = 3$

Hay funciones que no son pares ni impares ni son periódicas. Por ejemplo, la función cuya gráfica es



Ejercicios resueltos

Los cestillos de una noria van subiendo y bajando a medida que la noria gira. Esta es la representación gráfica de la función tiempo-distancia al suelo de uno de los cestillos:



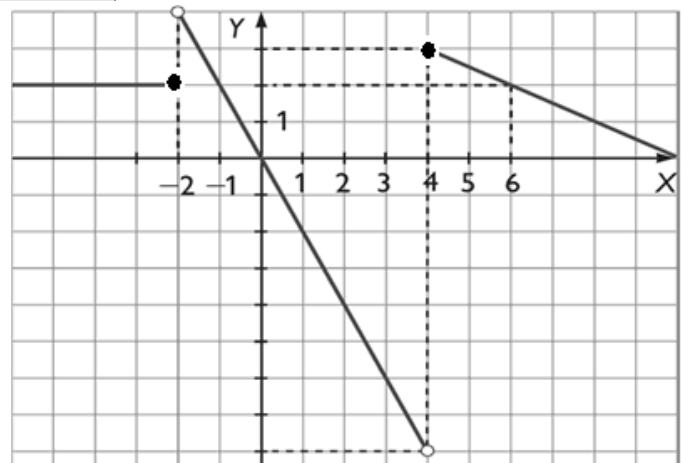
a) ¿Cuánto tarda la noria en dar una vuelta completa? Solución: 40 s

b) Indica cuál es la altura máxima y di cuál es el radio de la noria.

Solución: La altura máxima es 16 m y el radio de la noria es 8 m

c) Calcula, sin continuar la gráfica, a qué altura se encuentra la noria a los 3 minutos.

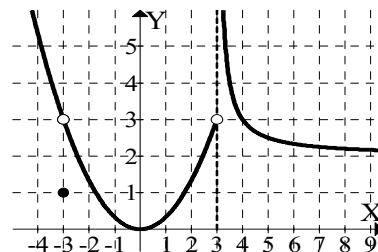
Solución: Como 3 min son 180 segundos y $180:40 = 4,5$, la noria habrá dado 4 vueltas y media. Luego, se encuentra arriba del todo

ACTIVIDADES

1.- Para la función f dada por la siguiente gráfica:

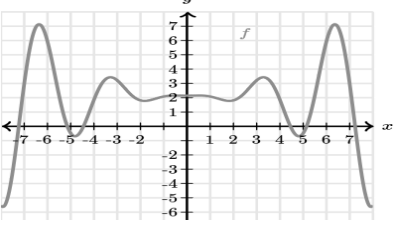
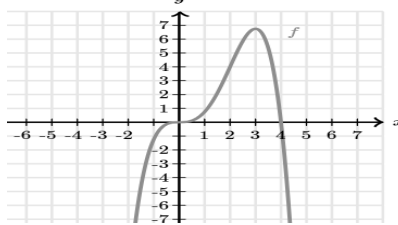
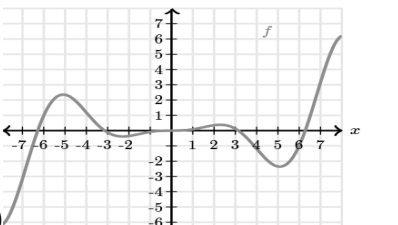
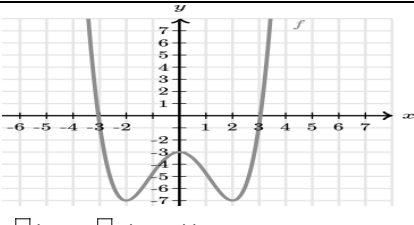
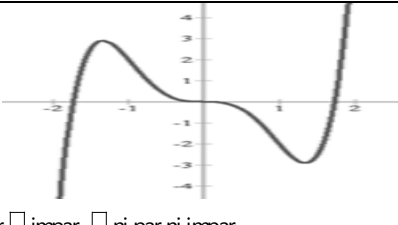
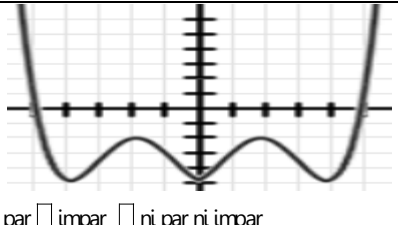
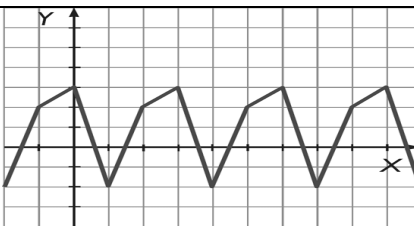
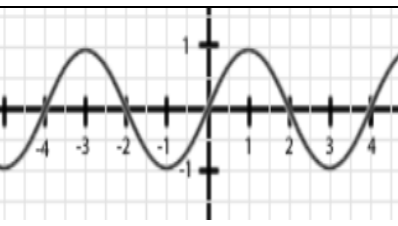
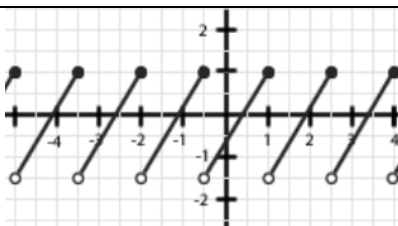
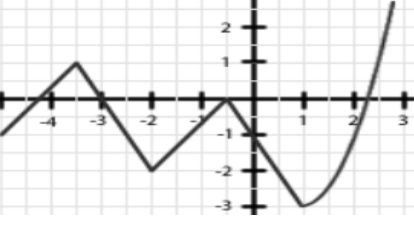
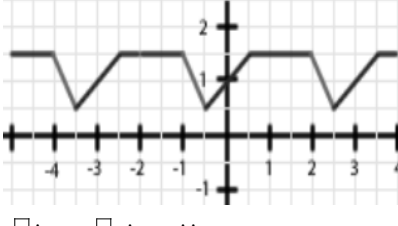
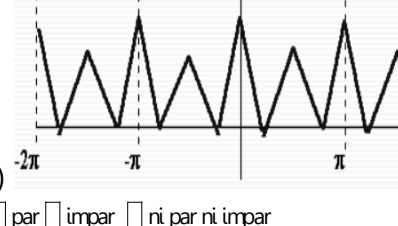
- Indica en qué intervalo la función es constante.
- Calcula $f(4)$.
- ¿Qué valor de x tiene imagen igual a -4 ?
- Indica los valores de x para los que se produce la discontinuidad de f .
- Indica los máximo ó mínimos de la función si es que existiesen

2.- Sea f la función dada por la siguiente gráfica:

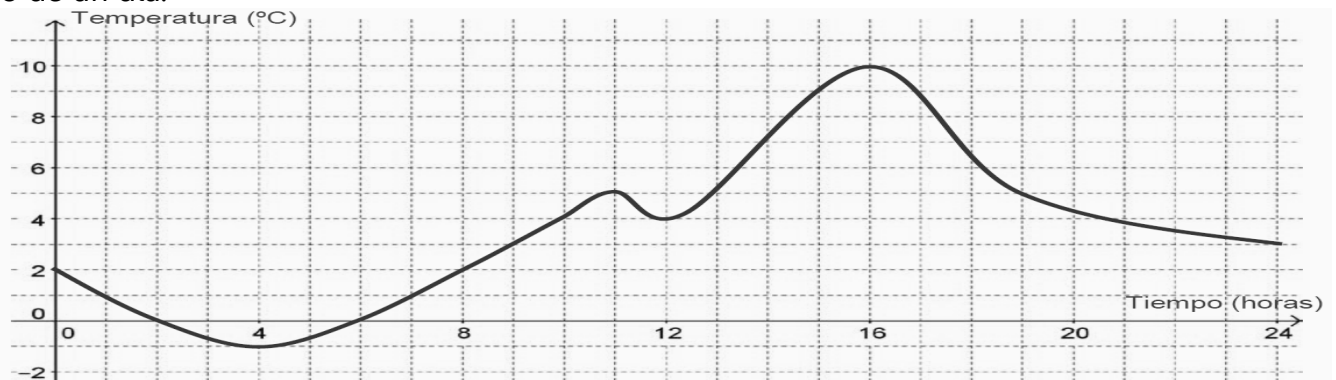


- Indica en qué intervalo la función es creciente.
- Calcula $f(-3)$.
- ¿Qué número tiene imagen igual a 3?
- Indica los valores de x para los que se produce la discontinuidad de f .
- ¿Cuál es el mínimo relativo y absoluto?

3.- Selecciona con una X si las siguientes funciones son pares, impares o ninguna de las dos cosas o si son periódicas o no periódicas. En caso de ser periódicas indica cuál es el periodo:

 <p>a) <input type="checkbox"/> par <input type="checkbox"/> impar <input type="checkbox"/> ni par ni impar <input type="checkbox"/> periódica. El periodo es ____ <input type="checkbox"/> no periódica</p>	 <p>b) <input type="checkbox"/> par <input type="checkbox"/> impar <input type="checkbox"/> ni par ni impar <input type="checkbox"/> periódica. El periodo es ____ <input type="checkbox"/> no periódica</p>	 <p>c) <input type="checkbox"/> par <input type="checkbox"/> impar <input type="checkbox"/> ni par ni impar <input type="checkbox"/> periódica. El periodo es ____ <input type="checkbox"/> no periódica</p>
 <p>d) <input type="checkbox"/> par <input type="checkbox"/> impar <input type="checkbox"/> ni par ni impar <input type="checkbox"/> periódica. El periodo es ____ <input type="checkbox"/> no periódica</p>	 <p>e) <input type="checkbox"/> par <input type="checkbox"/> impar <input type="checkbox"/> ni par ni impar <input type="checkbox"/> periódica. El periodo es ____ <input type="checkbox"/> no periódica</p>	 <p>f) <input type="checkbox"/> par <input type="checkbox"/> impar <input type="checkbox"/> ni par ni impar <input type="checkbox"/> periódica. El periodo es ____ <input type="checkbox"/> no periódica</p>
 <p>g) <input type="checkbox"/> par <input type="checkbox"/> impar <input type="checkbox"/> ni par ni impar <input type="checkbox"/> periódica. El periodo es ____ <input type="checkbox"/> no periódica</p>	 <p>h) <input type="checkbox"/> par <input type="checkbox"/> impar <input type="checkbox"/> ni par ni impar <input type="checkbox"/> periódica. El periodo es ____ <input type="checkbox"/> no periódica</p>	 <p>i) <input type="checkbox"/> par <input type="checkbox"/> impar <input type="checkbox"/> ni par ni impar <input type="checkbox"/> periódica. El periodo es ____ <input type="checkbox"/> no periódica</p>
 <p>j) <input type="checkbox"/> par <input type="checkbox"/> impar <input type="checkbox"/> ni par ni impar <input type="checkbox"/> periódica. El periodo es ____ <input type="checkbox"/> no periódica</p>	 <p>k) <input type="checkbox"/> par <input type="checkbox"/> impar <input type="checkbox"/> ni par ni impar <input type="checkbox"/> periódica. El periodo es ____ <input type="checkbox"/> no periódica</p>	 <p>l) <input type="checkbox"/> par <input type="checkbox"/> impar <input type="checkbox"/> ni par ni impar <input type="checkbox"/> periódica. El periodo es ____ <input type="checkbox"/> no periódica</p>

4.- La siguiente gráfica corresponde a una función f y muestra la temperatura en una ciudad a lo largo de un día.



(Se suponen los extremos de la gráfica incluidos en la misma)

A la vista de la gráfica, determina:

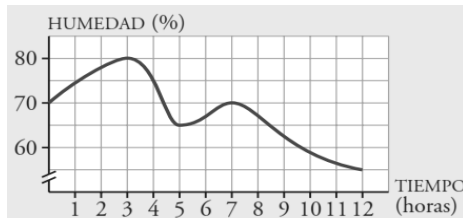
- La temperatura mínima y la hora a la que se produce.
- Los máximos y mínimos relativos e indica si alguno de ellos es absoluto.
- Las horas en las que la temperatura fue de $3\text{ }^{\circ}\text{C}$.
- Los intervalos de tiempo en los que la función es creciente.

5.- En una clase de laboratorio un alumno ha medido la temperatura de un líquido según se calentaba. Los resultados del experimento los anotó en la siguiente tabla.

Tiempo (minutos)	0	1	2	3
Temperatura ($^{\circ}\text{C}$)	20	24	30	40

- ¿En qué intervalo de tiempo crece más la temperatura?
- ¿Es una función continua?

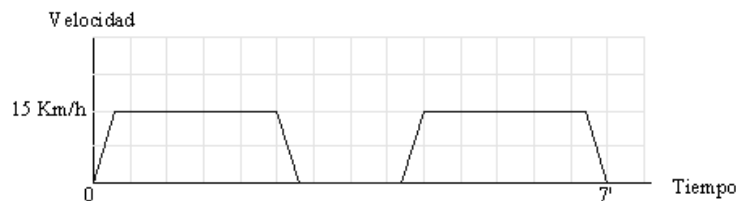
6.- Esta gráfica muestra la humedad relativa del aire en una ciudad desde las 0 h a las 12 h.



(Suponemos los extremos de la gráfica incluidos)

- ¿A qué horas la humedad es del 75%?
- ¿Cuál es el % de humedad a las 12 h?
- ¿En qué intervalos de tiempo crece la humedad?
- Indica los máximos y el mínimo relativo de la función.

7.- La gráfica muestra la velocidad que alcanza el carrusel de una feria a lo largo de diferentes viajes que realiza.



- ¿Cuánto dura cada parada?
- ¿A qué velocidad va el carrusel?
- ¿Cuánto dura cada viaje?
- Indica cuál es el periodo.

Actividades del libro: 15 (pág. 237) y 19 (pág. 239)