1.- CONCEPTO DE SUCESIÓN

1.- En las siguientes sucesiones descubre cuál es la regla de formación de los términos y calcula dos términos más:

a) 3 , –6 , 12 , –24 , ... b) 3 , 2 , 5 , 7 , 12 , ... c) 23 , 18 , 13 , ... d) 1 , 1 , 3 , 5 , 9 , 17 , ...

e) –600 , –500 , –400 , ... f) 21 , 14 , 7 , ... g) 2 , 6 , 18 , 54 , ... h) 10 , 3 , –4 , ...

i) 2 , 3 , 6 , 18 , 108 , ... j) 1 , 7 , 8 , 15 , 23 ,......

Solución

a) Regla: multiplicar por –2; 48, –96 b) regla: sumar los dos términos anteriores; 19, 31

c) regla: restar 5; 8, 3 d) regla: sumar los tres términos anteriores; 31, 57

e) regla: sumar 100: –300, –200 f) regla: dividir entre 2; 3,5 ; 1,75

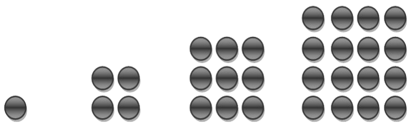
g) regla: multiplicar por 3; 162, 486 h) regla: restar 7; –11, –18

i) regla: multiplicar los dos términos anteriores; 1944, 209952

j) regla: sumar los dos términos anteriores; 38, 61

2.- Calcula los términos que se piden: a) $x_n = \frac{5n-1}{3n+2}$, el décimo término b) $a_n = -3.2^{n-752}$, a_{750}.

Solución: a) $x_{10} = \frac{5.10-1}{3.10+2} = \frac{49}{32}$ b) $a_{750} = -3.2^{750-752} = -3.2^{-2} = \frac{-3}{4}$

3.- En la sucesión  la 1ª figura tiene 1 círculo, la 2ª tiene 4, la 3ª, 9, etc.

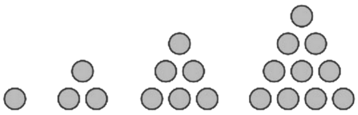
a) Calcula cuántos círculos tendrá la figura que va en el lugar 15 b) Halla el término general, a_n.

Solución: a) $15^2 = 225$ círculos b) $a_n = n^2$.

2.- SUCESIONES RECURRENTES

1.- En una sucesión de números, cada término es igual al doble del anterior, menos 3.
Calcula los cinco primeros términos de la sucesión sabiendo que el primer término es 7.

Solución: $a_1 = 7$, $a_2 = 2.7 - 3 = 11$, $a_3 = 2.11 - 3 = 19$, $a_4 = 2.19 - 3 = 35$, $a_5 = 2.35 - 3 = 67$

2.- Nos dan la siguiente serie de círculos:  . Dibuja las 3 siguientes figuras.
Sea la sucesión a_n del número de círculos. Observa qué $a_n = a_{n-1} + n$ y calcula a_5, a_6 y a_7

Solución: $a_5 = a_4 + 5 = 9 + 5 = 14$ $a_6 = a_5 + 6 = 14 + 6 = 20$ $a_7 = a_6 + 7 = 20 + 7 = 27$

3.- Halla el tercer y cuarto término de las siguientes sucesiones recurrentes:

a) $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_n = a_{n-1} - 3a_{n-2}$ b) $x_1 = -3$, $x_2 = 7$, $a_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}$

c) $b_1 = 4$, $b_2 = -2$, $b_n = 6b_{n-1} - 5b_{n-2}$ d) $r_1 = 7$, $r_2 = 6$, $r_n = 5r_{n-1} + 2r_{n-2}$

Solución

a) $a_3 = a_2 - 3a_1 = 5 - 3.2 = -1$ $a_4 = a_3 - 3a_2 = -1 - 3.5 = -16$

b) $x_3 = 2x_2 + x_1 = 2.7 + (-3) = 11$ $x_4 = 2x_3 + x_2 = 2.11 + 7 = 29$

c) $b_3 = 6b_2 - 5b_1 = 6(-2) - 5.4 = -32$ $b_4 = 6b_3 - 5b_2 = 6(-32) - 5(-2) = -182$

d) $r_3 = 5r_2 + 2r_1 = 5.6 + 2.7 = 44$ $r_4 = 5r_3 + 2r_2 = 5.44 + 2.6 = 322$

3.- PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS

1.- Averigua si es una p.a. o una p.g. y luego halla el término general y el décimo segundo término:

a) 5, –15, 45, ... , b) 10 , 3 , – 4 , ... c) 3, 6, 12, 24, ... , d) 12 ; 8,5 ; 5 ; 1,5 ; ...

Solución: a) p.g., $a_n = a_1(r^{n-1}) = 5.(-3)^{n-1}$ b) p.a., $a_n = a_1 + (n-1)d = 10 + (n-1)(-7) = 17 - 7n$

c) p.g., $a_n = a_1(r^{n-1}) = 3.(2^{n-1})$ d) p.a., $a_n = a_1 + (n-1)d = 12 + (n-1)(-3{,}5) = 15{,}5 - 3{,}5n$

2.- Averigua qué lugar ocupa el número 689 en la sucesión –4, 3, 10, 17, 24, ...

Solución: Es p.a ; $a_n = a_1 + (n-1)d = -4 + (n-1)7 = 7n - 11 \Rightarrow a_n = 689 \Rightarrow 7n - 11 = 689 \Rightarrow n = 100$

3.- Considera la siguiente sucesión de figuras

a) ¿Cuántos puntos tiene la figura que ocupa el lugar 250?

b) Roberto ha dibujado una figura de 59 puntos. ¿Qué lugar ocupa esa figura en la sucesión?

Solución: a) p.a. , $a_{250} = a_1 + 249d = 2 + 249.3 = 749$ puntos

b) $a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + (n-1)3 = 3n - 1 \Rightarrow a_n = 59 \Rightarrow 3n - 1 = 59 \Rightarrow n = 20$

4.- Un caracol anda cada vez más despacio. El primer día recorre 600 m y cada día recorre los 2/3 del día anterior. ¿Cuántos metros recorre el décimo día? Redondea a centésimas

Solución: p.g., $a_{10} = 600\left(\frac{2}{3}\right)^9 \cong 15{,}61$ m

5.- Una aldea tiene 1600 habitantes. Suponiendo que la población cada año decreciera un 0,5%, ¿qué población tendrá cuando pasen 20 años? Redondea el resultado a las unidades

Solución: p.g., r = 100% – 0,5% = 99,5% = 0,995 $\Rightarrow a_{20} = 1600(0{,}995)^{19} = 1455$ hab

6.- Calcula cuántos días estuvo trabajando un camarero en un establecimiento sabiendo que el primer día recibió una gratificación de 10 €, y que cada día que pasaba recibía 3 € más que el día anterior, llegando a cobrar el último día 55 €.

Solución: p.a., $a_n = 10 + (n-1)3 = 3n + 7 \Rightarrow a_n = 55 \Rightarrow 3n + 7 = 55 \Rightarrow n = 16$ días

7.- La maquinaria de una fábrica pierde cada año un 20% de su valor. Si costó 4 millones de euros, ¿en cuánto se valorará después de 10 años de funcionamiento? Redondea a las unidades

Solución: p.g., r = 100% – 20% = 80% = 0,8 $\Rightarrow a_{10} = 4.10^6(0{,}8)^9 = 536871$ €

8.- Una esquiadora comienza la pretemporada de esquí entrenando durante 15 minutos el primer día de octubre y se ha propuesto aumentar el entrenamiento 5 minutos cada día. Si cumple con su propósito,

a) ¿Cuánto tiempo deberá entrenar el 10 de octubre? b) ¿Qué día llegará a entrenar 2 horas?

Solución

a) p.a. , $a_{10} = a_1 + 9d = 15 + 9.5 = 60$ min = 1 h

b) 2 h = 120 min ; $a_n = 15 + (n - 1)5 = 5n + 10 \Rightarrow a_n = 120 \Rightarrow 5n + 10 = 120 \Rightarrow n = 22$ de octubre

Actividad del libro: 61 (pág. 226)

61. El primer día del año Carmen ha contado el dinero de su hucha: 58,40 €. Se ha prometido a sí misma meter el primer día de cada mes 5,50 €.

a) Halla el término general, a_n, de la sucesión que representa el dinero que tiene Carmen en el mes enésimo.

b) Escribe los cuatro primeros términos de a_n.

c) ¿Cuánto dinero tendrá Carmen al cabo de un año y medio si mantiene su promesa?

d) ¿Dentro de cuántos meses podrá Carmen comprarse una bicicleta de 200 €?

Solución

a) p.a., $a_n = 58{,}4 + (n - 1)5{,}5 = 5{,}5n + 52{,}9$

b) $a_1 = 58{,}4$ $a_2 = 58{,}4 + 5{,}5 = 63{,}9$ $a_3 = 63{,}9 + 5{,}5 = 69{,}4$ $a_4 = 69{,}4 + 5{,}5 = 74{,}9$

c) 1 año y medio = 18 meses $\Rightarrow a_{18} = 5{,}5.18 + 52{,}9 = 151{,}90$ €

d) $a_n = 200 \Rightarrow 5{,}5n + 52{,}9 = 200 \Rightarrow n \approx 27$ meses

4.- SUMA DE LOS PRIMEROS TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN

1.- En las siguientes sucesiones calcula el término general y la suma de los 15 primeros términos:

a) 80, 74, 68, 62, ... b) 2, 6, 18, ... c) 14, 11, 8, 5, ... d) 20, 10, 5, ... e) 60, 53, 46, ...

Solución

a) p.a., $a_n = 80 + (n - 1)(-6) = 86 - 6n$; $S_{15} = \dfrac{(a_1 + a_{15})15}{2} \xrightarrow{a_{15} = 86 - 6.15 = -4} \dfrac{[80 + (-4)]15}{2} = 570$

b) p.g., $a_n = 2.(3^{n-1})$; $S_{15} = \dfrac{a_1(r^{15} - 1)}{r - 1} = \dfrac{2(3^{15} - 1)}{3 - 1} = 14348906$

c) p.a., $a_n = 14 + (n - 1)(-3) = 17 - 3n$; $S_{15} = \dfrac{(a_1 + a_{15})15}{2} \xrightarrow{a_{15} = 17 - 3.15 = -28} \dfrac{[14 + (-28)]15}{2} = -105$

d) p.g., $a_n = 2.(0{,}5^{n-1})$; $S_{15} = \dfrac{a_1(r^{15} - 1)}{r - 1} = \dfrac{20(0{,}5^{15} - 1)}{0{,}5 - 1} \cong 40$

e) p.a., $a_n = 60 + (n - 1)(-7) = 67 - 7n$; $S_{15} = \dfrac{(a_1 + a_{15})15}{2} \xrightarrow{a_{15} = 67 - 7.15 = -38} \dfrac{[60 + (-38)]15}{2} = 165$

2.- ¿Cuánto suman los números naturales del 1 al 1000?

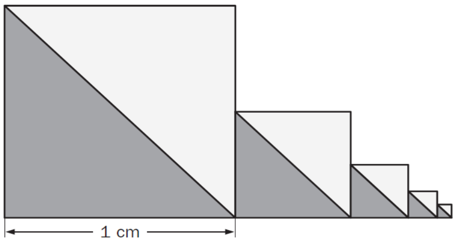
Solución

1, 2, 3, ... p.a., $a_n = 1 + (n-1)1 = n$; $S_{1000} = \frac{(a_1 + a_{1000})1000}{2} \xrightarrow{a_{1000} = 1000} \frac{(1+1000)1000}{2} = 500500$

3.- ¿Cuánto vale la suma $1+2+2^2+2^3+...+2^{25}$?

Solución: p.g., $S_{26} = \frac{a_1(r^{26}-1)}{r-1} = \frac{1(2^{26}-1)}{2-1} = 67108863$

4.- Calcula el área de la región de gris teniendo en cuenta que el lado de cada cuadrado es la mitad del cuadrado anterior. (Redondea el resultado a las centésimas)



Solución

$a_1 =$ área de la región gris de la 1ª figura $= \frac{1.1}{2} = \frac{1}{2}$

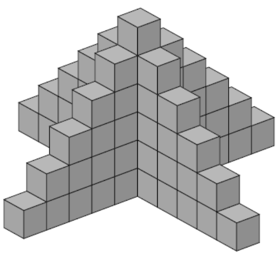
$a_2 =$ área de la región gris de la 2ª figura $= \frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{8}$

$a_3 =$ área de la región gris de la 3ª figura $= \frac{\frac{1}{4}.\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{32}$

La sucesión es $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}$ es una p.g. de razón $r = \frac{1}{4}$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \Rightarrow S_5 = \frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^5\right]}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}.\frac{1023}{1024}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{1023}{2048}}{\frac{3}{4}} = \frac{4092}{6144} \cong 0,67$$

5.- Calcula el número de bloques necesarios para construir una torre como la de la figura, pero de 60 pisos.



Solución

1er piso $\rightarrow$ 1 bloque : $a_1 = 1$; $a_2 = 5$; $a_3 = 9$; $a_4 = 13$;... $\Rightarrow$ p.a. de diferencia $d = 4$

$a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + (n-1).4 = 4n-3$

$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2} \Rightarrow S_{60} = \frac{(a_1 + a_{60}).60}{2}$. Como $a_{60} = 4.60 - 3 = 237$,

$S_{60} = \frac{(1+237).60}{2} = \frac{238.60}{2} = 7140$ bloques

---

6.- Un coronel manda formar a sus soldados y coloca 3 soldados en la primera fila, 7 en la segunda, 11 en la tercera, etc., hasta colocarlos a todos en 36 filas.

a) ¿Cuántos soldados habrá en la fila 20? b) ¿Cuántos soldados habrá en total?

Solución

a) p.a., d = 4, a_{20} = 3 + 19.4 = 79 soldados

b) $S_{36} = \frac{(a_1 + a_{36})36}{2} \xrightarrow{a_{36} = 3+35.4 = 143} \frac{(3+143)36}{2} = 2628$ soldados

7.- Cierta ONG ha construido un pozo para abastecer de agua potable a una población de Somalia. Su coste total ha sido de 1190 €. ¿Qué profundidad tiene el pozo si se sabe que el primer metro costó 12 € y cada metro restante costó 5 € más que el anterior?

Solución

p.a., d = 5, a_n = 12 + (n – 1)5 = 5n + 7

$$1190 = S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(12+5n+7)n}{2} = \frac{(5n+9)n}{2} = \frac{5n^2+9n}{2} \Rightarrow 5n^2 + 9n = 2.1190 \Rightarrow n = 20 \text{ m}$$

8.- Para pagar una deuda de 9450 €, Susana empieza pagando 100 € el primer mes y cada uno de los siguientes meses 50 € más que el mes anterior. Usando progresiones averigua cuánto tiempo le duró la deuda.

Solución

p.a., d = 50, a_n = 100 + (n – 1)50 = 50n + 50

$$9450 = S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(100+50n+50)n}{2} = \frac{(50n+150)n}{2} = \frac{50n^2+150n}{2} \Rightarrow 50n^2 + 150n = 2.9450 \Rightarrow n = 18 \text{ meses}$$

9.- A Petra le ofrecen dos contratos de trabajo:
Contrato A: 600 € el primer mes y le aumentarán 50 € cada mes
Contrato B: 100 € el primer mes y le aumentarán un 20% cada mes
Va a estar trabajando dos años.
Usa progresiones y averigua:
a) Lo que ganaría con el contrato A b) Lo que ganaría con el contrato B
c) El contrato que le conviene elegir explicando por qué.

Solución

a) 1er mes $\rightarrow$ 600 € : $a_1 = 600$; $a_2 = 650$; $a_3 = 700$;... $\Rightarrow$ p.a. de diferencia $d = 50$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 600 + (n-1).50 = 50n + 550$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2} \Rightarrow S_{24} = \frac{(a_1 + a_{24}).24}{2}. \text{ Como } a_{24} = 50.24 + 550 = 1750,$$

$$S_{24} = \frac{(600+1750).24}{2} = \frac{2350.24}{2} = 28\,200 \text{ €}$$

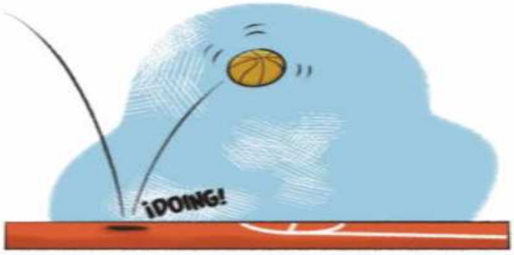
b) Como $100\% + 20\% = 120\%$, el sueldo de cada mes es el 120% del mes anterior (es decir, se va multiplicando por $120\% = 1,2$)
Luego, la sucesión de sueldos es una p.g. de razón $r = 1,2$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \Rightarrow S_{24} = \frac{100(1-1,2^{24})}{1-1,2} \cong 39\,748,42 \text{ €}$$

c) El contrato C, porque gana más

Actividades del libro: 49 (pág. 225), 62 y 65 (pág. 226)

49. Un balón de baloncesto se deja caer desde una altura de 50 m y cada vez que bota sube a una altura igual a $\frac{3}{5}$ de la máxima altura conseguida anteriormente.



a) Escribe los primeros términos de la sucesión de las alturas que alcanza el balón antes de volver a caer.

b) Cuando toca el suelo por décima vez, ¿cuántos metros ha recorrido el balón?

Solución

a) Sucesión de alturas: $a_1 = 50 \quad a_2 = \frac{3}{5}$ de $50\ m = 30\ m$

$a_3 = \frac{3}{5}$ de $30\ m = 18\ m \qquad a_4 = \frac{3}{5}$ de $18\ m = 10{,}8\ m$; etc

La sucesión de alturas es 50 ; 30 ; 18 ; 10,8, ...

b) La sucesión de alturas es una p.g. de razón $r = \frac{3}{5} = 0{,}6$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \Rightarrow S_{10} = \frac{50(1-0{,}6^{10})}{1-0{,}6} \cong 124{,}24\ m$$

62. Las localidades de la primera fila de una sala de conciertos cuestan 95 € cada una y a partir de aquí, el precio de cada butaca desciende 6 € a medida que la fila se va alejando del escenario. Si cada una de las 10 filas de la sala tiene 20 butacas, ¿cuál es la recaudación máxima que puede conseguirse?

Solución

precio de cada una de las 20 butacas de la 1ª fila $\rightarrow$ 95 € : $a_1 = 95$

$a_2 = 89$; $a_3 = 83$;... Es una p.a. de diferencia $d = -6$

$a_n = a_1 + (n-1)d = 95 + (n-1).(-6) = 101 - 6n \rightarrow a_{10} = 101 - 6.10 = 41$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2} \Rightarrow S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}).10}{2} = \frac{(95+41).10}{2} = \frac{136.10}{2} = 680$$

Como cada fila tiene 20 butacas, la recaudación máxima sería $680.20 = 13600$ €

65. Raquel ha comprado los muebles de su salón a plazos: el primer mes pagó 18,50 €, el segundo mes, 21 €, el tercer mes, 23,50 €, y así sucesivamente. Si el último mes pagó 61 €, ¿cuántos meses duró el pago? ¿Cuál fue el precio final de todos los muebles?

Solución

1er mes $\rightarrow$ 18,50 € : $a_1 = 18{,}50$; $a_2 = 21$; $a_3 = 23{,}50$;... $\Rightarrow$ p.a. de diferencia $d = 2{,}5$

$a_n = a_1 + (n-1)d = 18{,}5 + (n-1).2{,}5 = 2{,}5n + 16$

a) $a_n = 61 \Rightarrow 2{,}5n + 16 = 61 \Rightarrow 2{,}5n = 45 \Rightarrow n = 18 \Rightarrow$ le duró 18 meses = 1 año y medio

b) $S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2} \Rightarrow S_{18} = \frac{(a_1 + a_{18}).18}{2}$. Como $a_{18} = 61$,

$$S_{18} = \frac{(18{,}5+61).18}{2} = \frac{79{,}5.18}{2} = 715{,}50\ €$$