1.- LENGUAJE ALGEBRAICO

En matemáticas cuando tenemos que representar un número o cantidad desconocida usamos una letra.

Ejemplos:

Lo que valen x kg de manzanas a 1,25 €/kg $\rightarrow$ 1,25x El número siguiente al triple de a $\rightarrow$ 3a + 1

La mitad del consecutivo de b $\rightarrow \dfrac{b+1}{2}$ El anterior al número natural n $\rightarrow$ n – 1

Las expresiones que obtenemos cuando usamos letras y números relacionados por operaciones aritméticas (sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potencias y raíces) se llaman expresiones algebraicas. Las letras que aparecen en una expresión algebraica se llaman *variables*.

En el lenguaje algebraico podemos usar las letras que queramos, x, y, z, a, b, c, m, n, p , etc.

Ejemplos: $3x^2 - x + 2$, $2a - 3b$, $\dfrac{3x-1}{2y+3}$, $5m^2 + n^2$ son expresiones algebraicas

Observa que para expresar la multiplicación de un número por una letra no se suele escribir el punto de multiplicar. Por ejemplo, 2.a se escribe simplemente 2a

ACTIVIDADES *Actividades del libro*: 1, 2, 3 (pág. 131) y 34 (pág. 139)

2.- VALOR NUMÉRICO DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA

El valor numérico de una expresión algebraica es el valor que se obtiene cuando se sustituyen las letras por los números que nos dan y después se hacen las operaciones.

Ejemplos:

1) El valor numérico de $-3x^2 + 2x + 6$ para x = 2 es: $-3.2^2 + 2.\,2 + 6 = -3.4 + 4 + 6 = -12 + 4 + 6 = -2$

2) El valor numérico de $-m^2n^3 + mn + 2m^3 - 3n^2 - 1$ para m = 3, n = 2 es:
$-3^2.\,2^3 + 3.\,2 + 2.\,3^3 - 3.\,3^2 - 1 = -9.\,8 + 6 + 2.\,27 - 3.\,9 - 1 = 72 + 6 + 54 - 27 - 1 = 104$

El valor numérico se puede usar para resolver problemas:

Por ejemplo, si la fórmula de la velocidad media es $v = \dfrac{d}{t}$ y queremos hallar la velocidad media cuando recorremos 210 km en 3 h, sustituimos d = 200, t = 3 y obtenemos: $v = \dfrac{210}{3} = 70$ km/h

ACTIVIDADES

1.- Halla los intereses que producen 6 500 € colocados a interés simple en un Banco al 3% de rédito durante 5 años sabiendo que la fórmula es $I = \dfrac{Crt}{100}$, siendo C el capital que se coloca en el Banco, r el rédito y t el tiempo en años

2.- La presión sanguínea normal P en una persona sana se puede estimar mediante la expresión $P = 11 + \dfrac{E}{20}$, donde E representa la edad en años.

a) ¿Cuál será la presión sanguínea de una persona de 40 años? b) ¿Y una de 30? c) ¿Y una de 60?

3.- En electricidad se utiliza la relación llamada ley de Ohm, $R = \dfrac{V}{I}$, donde R es la resistencia eléctrica, V el voltaje e I intensidad de corriente. Calcula la resistencia R sabiendo que V = 120 voltios y la intensidad de corriente es I = 8 amperios

Actividades del libro: 8 (pág. 131) y 39 (pág. 139)

3.- MONOMIOS. OPERACIONES

Monomios

Es una expresión algebraica que consta de una parte numérica llamada coeficiente seguida de una letra llamada parte literal. Por ejemplo, 3x es un monomio
Los números se consideran monomios y se llaman monomios constantes.
Por ejemplo, el número –3 es un monomio constante, pues $-3 = -3x^0$
Cuando el coeficiente es 1 no se suele escribir. Por ejemplo, 1x se escribe simplemente como x

Grado de un monomio

El grado de un monomio es el exponente de la parte literal, si hay sólo una letra o la suma de los exponentes si hay varias letras. Por ejemplo, x^4 tiene grado 4, 5x tiene grado 1 y $7x^2y$ tiene grado 3

Monomios semejantes

Son los que tienen la misma parte literal. Por ejemplo, 3x, –5x son semejantes, pero 2x, 2y no lo son

Suma y resta de monomios

Sólo se pueden sumar o restar monomios semejantes. Se hace sumando o restando los coeficientes y dejando la misma parte literal. *Ejemplos*: $3x + 5x = (3 + 5)x = 8x$ $9m - 7m = (9 - 7)m = 2m$

Cuando sumamos o restamos monomios semejantes se dice que estamos reduciendo los términos.

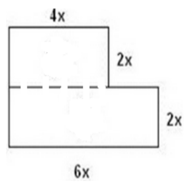
Si los monomios no son semejantes entonces **NO** se pueden sumar ni restar.
Por ejemplo, los monomios 3m y 2n no se pueden sumar ni restar porque no son semejantes.
La suma o resta de monomios no semejantes hay que dejarla indicada así, 3m + 2n ó 3m – 2n

Producto de un número por un monomio

Para multiplicar un número por un monomio se multiplica el número por el coeficiente y se deja la misma parte literal. Por ejemplo, 3.5x = 15x.

ACTIVIDADES

1.- Halla el monomio que resulta de calcular el perímetro de cada figura

a) 

b) Un octógono de lado 3x

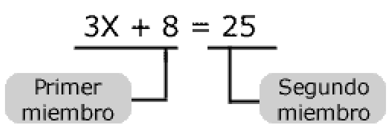
Actividades del libro: 9 y 11 (pág. 132), 36 (pág. 139)

4.- ECUACIONES. CLASIFICACIÓN

Concepto de ecuación

Una ecuación es una igualdad en la que aparecen números, letras y operaciones entre ellos.
A las letras les llamamos incógnitas. Por ejemplo, $x + 2 = 5$, $x^2 - 5x + 6 = 0$, $3x - 7y = -3$ son ecuaciones.

Elementos de una ecuación



Términos de la ecuación: Son los monomios que aparecen. En el ejemplo anterior, los términos son 3x , 8 y 25. Los términos numéricos, 8 y 25, se llaman términos independientes.
Resolver una ecuación es averiguar lo que tiene que valer la incógnita para que se cumpla la igualdad. Por ejemplo, la solución de la ecuación $x + 2 = 9$ es $x = 7$, porque para $x = 7$ se cumple la igualdad.

A veces se puede hallar la solución de una ecuación por reconstrucción

Ejemplo:

Hallar un número sabiendo que restando 4 del triple de dicho número resulta 29.

$\square \xrightarrow{\text{triple} \leftrightarrow \cdot 3} \square \xrightarrow{\text{restar } 4 \leftrightarrow -4} 29$ Siguiendo el camino inverso

$11 \xleftarrow{\text{tercera parte} \leftrightarrow : 3} 33 \xleftarrow{\text{sumar } 4 \leftrightarrow +4} 29$. Luego, el número es 11

Clasificación de las ecuaciones

Ecuaciones compatibles: Son las que tienen solución.
Si son ciertas para cualquier valor de la incógnita se llaman identidades.
Si tienen infinitas soluciones se llaman compatibles indeterminadas
Por ejemplo, $x + 2 = 2 + x$ es una identidad porque se cumple para todos los valores de la x

Ecuaciones incompatibles: Son las que no tienen solución. Por ejemplo, $x = x + 1$ es incompatible porque es imposible que un número sea igual que su consecutivo.

ACTIVIDADES

1.- Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones: a) $x^3 = -8$ b) $2^x = 64$ c) $\sqrt{x} = 7$

2.- Resuelve por reconstrucción:
a) ¿Cuál es el número que al multiplicarlo por 2 y sumarle 84 da como resultado 284?

b) Si un número lo multiplicas por 5 y al resultado le restas 40, obtienes 25. ¿Cuál es el número?

Actividades del libro: 14 (pág. 133) y 47 (pág. 140)

5.- ECUACIONES EQUIVALENTES. REGLAS DE EQUIVALENCIA

Ecuaciones equivalentes

Son las que tienen la misma solución. Por ejemplo, $x + 2 = 5$, $x + 1 = 4$ son ecuaciones equivalentes porque las dos tienen la misma solución, que es $x = 3$

Reglas de equivalencia

Son unas reglas que sirven para resolver ecuaciones. Con ellas pasamos de una ecuación a otra equivalente más simple. Para resolver ecuaciones se usan principalmente dos reglas:

Regla de la suma: Si sumamos o restamos la misma cantidad en los dos miembros de una ecuación se mantiene la igualdad.

Ejemplos:

$x - 3 = 9 \xrightarrow{\text{sumamos 3 en los dos miembros}} x - 3\ x = 9 + 3 \rightarrow x = 12$

$x + 7 = 2 \xrightarrow{\text{restamos 7 en los dos miembros}} \rightarrow x = 2 - 7 \rightarrow x = -5$

Fíjate bien en que
- El 3 que estaba restando en el 1er miembro ha pasado al 2º miembro sumando
- El 7 que estaba sumando en el 1er miembro ha pasado al 2º miembro restando

En general, en una ecuación se pueden pasar los términos de un miembro a otro cambiándoles de signo.

Las ecuaciones anteriores se resolverían directamente aplicando lo anterior así:

$x - 3 = 9 \rightarrow x = 9 + 3 \rightarrow x = 12$ $x + 7 = 2 \rightarrow x = 2 - 7 \rightarrow x = -5$

<u>Regla del producto</u>: Si multiplicamos o dividimos los dos miembros de una ecuación por un mismo número distinto de 0, se mantiene la igualdad.

<u>Ejemplos</u>:

$$\frac{x}{7} = 2 \xrightarrow{\text{multiplicamos por 7 los dos miembros}} \frac{x}{7}.7 = 2.7 \rightarrow x = 14$$

$$3x = 12 \xrightarrow{\text{dividimos entre 3 los dos miembros}} \frac{3x}{3} = \frac{12}{3} \rightarrow x = 4$$

Fíjate bien en que

- El 7 que estaba dividiendo en el 1er miembro ha pasado al 2º miembro multiplicando
- El 3 que estaba multiplicando en el 1er miembro ha pasado al 2º miembro dividiendo

En general, en una ecuación lo que multiplica a la incógnita pasa dividiendo al otro miembro de la ecuación y lo que divide pasa multiplicando.

Las ecuaciones anteriores se resolverían directamente aplicando lo anterior así:

$$3x = 12 \rightarrow \quad x = \frac{12}{3} \rightarrow \quad x = 4 \qquad\qquad \frac{x}{7} = 2 \rightarrow \quad x = 2\ .\ 7 \quad \rightarrow \quad x = 14$$

ACTIVIDADES

1.- Usando las reglas de equivalencia, despeja x: a) $ax - b = 0$ b) $\frac{x}{3a} = 2b$

2.- Dada la fórmula $v = \frac{d}{t}$

a) Despeja “d” en la fórmula anterior

b) Usando la fórmula obtenida en a) calcula “d” sabiendo que $v = 6$, $t = 0{,}5$

3.- Dada la fórmula $F = ma$

a) Despeja “a” en la fórmula anterior

b) Usando la fórmula obtenida en a) calcula “a” sabiendo que $F = 10$, $m = 5$

<u>6.- ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA</u>

Son ecuaciones donde la incógnita está elevada a 1. Por ejemplo, $3x + 2 = 5$ es una ecuación de primer grado.

Para resolver ecuaciones de primer grado se suelen usar las reglas de equivalencia.

Conviene pasar todos los términos de la x a un miembro y los números al otro. Cuando pasamos términos de un miembro a otro se dice que estamos trasponiendo los términos.

<u>Ejemplos</u>:

1) Si queremos resolver la ecuación $3x - 3 + 2x + 9 = 18 + 12x - 5 - 8x$, podemos pasar todas las x al 1er miembro y los números al 2º:

$$3x + 2x - 12x + 8x = 18 - 5 + 3 - 9 \xrightarrow{\text{reduciendo los términos}} x = 7$$

También podemos resolver la ecuación reduciendo los términos semejantes y luego trasponiendo términos: $5x + 6 = 4x + 13 \xrightarrow{\text{trasponiendo los términos}} 5x - 4x = 13 - 6 \rightarrow x = 7$

2) $3x + 7 - x - 2 = -4x - 9 + 10x + 2 + 2x \rightarrow 2x + 5 = 8x - 7$

$$2x - 8x = -7 - 5 \rightarrow -6x = -12 \rightarrow x = \frac{-12}{-6} \rightarrow x = 2$$

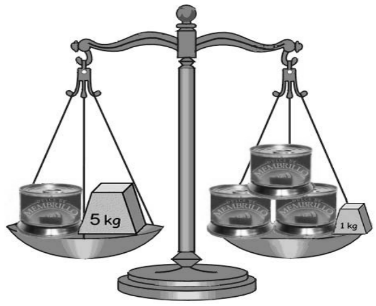
3) $\frac{5x-7}{2} = 16 \Rightarrow 5x - 7 = 16\ .\ 2 \Rightarrow 5x - 7 = 32 \Rightarrow 5x = 39 \Rightarrow x = \frac{39}{5}$

4) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{5x}{4}-1=\frac{x}{6}$. Se multiplican todos los términos por el mcm de los denominadores, que es 12

$12.\frac{x}{2}+12.\frac{x}{3}+12.\frac{5x}{4}-12.1=12.\frac{x}{6}$ $\Rightarrow$ 6x + 4x +15x – 12 = 2x $\Rightarrow$ 23x = 12 $\Rightarrow$ $x=\frac{23}{12}$

ACTIVIDADES

1.- Sabiendo que la balanza está equilibrada, ¿cuánto pesa cada lata?



2.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) 8x – 18 + 2x + 10 = 3x – 2 – 2x – 5 b) 12x – 5 – 4x + 4 = 9x – 3 – 5x + 6

3.- Resuelve las siguientes ecuaciones con denominadores:

a) $\frac{2x+7}{5}=4$ b) $8-\frac{3x}{10}+\frac{2x}{4}-\frac{5x}{8}=-9$ c) $\frac{x}{4}-\frac{13}{6}=\frac{5x}{2}-\frac{5}{6}$ d) $\frac{3x}{5}-2+\frac{3x}{2}-\frac{x}{10}=0$

Actividad del libro: 21 (pág. 135), 54 a) b) y 60 (pág. 141)

7.- RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS USANDO ECUACIONES

Para resolver problemas usando ecuaciones lee el enunciado y extrae los datos y la incógnita. Construye la ecuación que los relaciona. Resuelve la ecuación e indica cuál es la solución del problema. Por último comprueba la solución.

Problemas resueltos

1) Halla cinco números enteros consecutivos cuya suma sea 60.

Resolución

Números consecutivos: x , x+1 , x+2 , x+3 , x+4 . Ecuación: x + x+1 + x+2 + x+3 + x+4 = 60
5x + 10 = 60 $\Rightarrow$ 5x = 50 $\Rightarrow$ x = 10. Luego, los números son 10, 11, 12, 13 y 14

2) En un zoológico el número de monos es el doble que el de leones, menos 5. Si entre monos y leones hay 34 animales, ¿cuántos monos y cuántos leones hay?

Resolución

Monos: 2x – 5 Leones: x Ecuación: 2x – 5 + x = 34 $\Rightarrow$ 3x = 34 + 5 $\Rightarrow$ 3x = 39 $\Rightarrow$ $x=\frac{39}{3}=13$

Luego, hay Monos: 2.13 – 5 = 21 Leones: 13

3) Un equipo de rugby compra 30 camisetas y 7 balones por un total de 486 €. El precio de una camiseta es las dos terceras partes del precio de un balón. ¿Cuál es el precio de cada camiseta y de cada balón?

Resolución

Precio de una camiseta: 2x/3 Precio de un balón: x

Ecuación: $30.\frac{2x}{3}+7x=486$ $\Rightarrow$20x + 7x = 486 $\Rightarrow$ x = 18. Luego, el precio del balón es 18 € y el de la camiseta 2.18/3 = 12 €

4) Dentro de 2 años la edad de Pedro será de 8 años menos que el doble de la que tiene ahora. ¿Qué edad tiene Pedro?

Resolución

Edad de Pedro: x   Ecuación: $x + 2 = 2x - 8 \Rightarrow x = 10$. Pedro tiene ahora 10 años

5) Pedro tiene el doble de dinero que Juan. Si Pedro le da 15 € a Juan tendrán los dos lo mismo. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

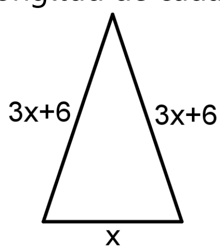
Resolución

Dinero de Pedro: 2x   Dinero de Juan: x   Ecuación: $2x - 15 = x + 15 \Rightarrow x = 30$.
Luego, Pedro tiene 60 € y Juan 30 €

6) El perímetro de un triángulo isósceles es de 54 cm y cada uno de los lados iguales mide 6 cm más que el triple de la base. ¿Cuál es la longitud de los lados?

Resolución

Longitud de la base: x   Longitud de cada uno de los lados iguales: 3x + 6



Ecuación: $P = 54 \Rightarrow x + 3x+6 + 3x+6 = 54 \Rightarrow x = 6$.
Luego, la base mide 6 cm y cada uno de los lados iguales 3.6 + 6 = 24 cm

ACTIVIDADES

1.- Una persona compra un ordenador y una impresora por 803 €. Por la impresora pagó 2/9 de lo que pagó por el ordenador. Halla lo que vale el ordenador y la impresora por separado.

2.- El sueldo mensual de Arturo es el triple que el de su hijo Enrique. El mes que viene, Enrique subirá de categoría y recibirá 500 € más, con lo que ganará la mitad que su padre. ¿Cuánto gana actualmente cada uno?

3.- Dentro de 24 años Pedro tendrá el triple de la edad que tiene ahora. ¿Cuál es su edad actual?

4.- La edad de Juan es doble de la de José. Si Juan tuviera 10 años menos y José 5 años más, los dos tendrían la misma edad. ¿Qué edad tienen?

5.- Un jardín rectangular mide el triple de largo que de ancho y se ha rodeado con una tela metálica de 48 m. ¿Cuál es su superficie?

6.- El perímetro de un rectángulo es de 234 cm. La altura es la mitad de la base. Halla la superficie del rectángulo.

Actividades del libro: 23 (pág. 135), 28 (pág. 137), 56 (pág. 141), 62, 63, 65, 66 y 70