1.- RAZONES Y PROPORCIONES

Razón entre cantidades

Una magnitud es cualquier propiedad que se pueda medir numéricamente.
Por ejemplo, el peso, la longitud y el número de alumnos, etc, son magnitudes.
No son magnitudes, por ejemplo, el color del pelo o el programa de TV favorito.

La razón directa entre dos cantidades es el resultado de dividir la primera cantidad entre la segunda.
Si dividimos la segunda entre la primera se llama razón inversa.

En general, si tenemos dos cantidades a y b, la razón directa es $\frac{a}{b}$ y la razón inversa $\frac{b}{a}$.

- Si son cantidades de la misma magnitud, la razón nos indica las veces que es mayor la primera con respecto a la segunda.

Ejemplo:

Una barra de pan mide 46 cm de largo y otra barra 11,5 cm.
La razón directa es $\frac{46\text{ cm}}{11{,}5\text{ cm}} = 4$. Significa que la 1ª barra es 4 veces más larga que la 2ª.
La razón inversa es $\frac{11{,}5\text{ cm}}{4\text{ cm}} = 0{,}25 = \frac{1}{4}$. Significa que la 2ª barra mide la cuarta parte que la primera.

- Si son cantidades de distintas magnitudes, tiene otro significado.

Ejemplos:

1) Dos kg de patatas valen 5 €.
La razón directa es $\frac{2\text{ kg}}{5\text{ €}}$ = 0,4 kg/€. Significa que con 1 € se pueden comprar 0,4 kg, o sea 400 g.
La razón inversa es $\frac{5\text{ €}}{2\text{ kg}}$ = 2,50 €/kg. Significa que 1 kg vale 2,50 €.

2) Un ciclista hace una etapa de 200 km en 4 h.
La razón directa es $\frac{200\text{ km}}{4\text{ h}} = 50\text{ km/h}$. Significa que ha llevado una velocidad media de 50 km/h.
La razón inversa es $\frac{4\text{ h}}{200\text{ km}} = 0{,}02\text{ h/km}$. Significa que tarda una media de 0,02 h en hacer 1 km

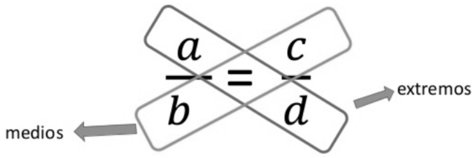
Observa que $0{,}02\text{ h} \xrightarrow{.\ 60} 1{,}2\text{ min} = 1\text{ min} + \overbrace{0{,}2\text{ min}}^{.\ 60} \longrightarrow 1\text{ min } 12\text{ seg}$

A diferencia con las fracciones, en las razones los números no tienen por qué ser enteros

Proporciones

Si dos razones son iguales decimos que forman una proporción.
Ejemplo: Si 3 kg de patatas valen 5 €, entonces 6 kg valen 10 €, entonces como $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$, las razones $\frac{3\text{ kg}}{5\text{ €}}$ y $\frac{6\text{ kg}}{10\text{ €}}$ forman una proporción.
Puedes comprobarlo viendo que los productos cruzados valen lo mismo o viendo que al dividir se obtiene el mismo valor. En este caso, el valor que se obtiene es 0,6.
Este valor se llama constante de la proporción.

En general, una proporción entre dos razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se puede escribir así: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$



Se lee "a" es a "b" como "c" es a "d" y se cumple que ad = bc

Otras propiedades de las proporciones

1) Si dos razones forman una proporción, las razones inversas también forman una proporción.

Ejemplo: $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} \leftrightarrow \frac{5}{2} = \frac{10}{4}$. En general, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

2) Si en una proporción cambiamos los medios entre sí o los extremos entre sí también se forma una proporción. *Ejemplo*: $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} \leftrightarrow \frac{2}{4} = \frac{5}{10} \leftrightarrow \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$. En general, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

ACTIVIDADES

1.- Suponiendo que la población de la Comunidad Andaluza sea aproximadamente 8 280 000 hab y la de la provincia de Granada 920 000 hab, ¿cuántas veces es mayor la población de Andalucía que la de la de Granada?

2.- Calcula las razones directa e inversa entre las cantidades que se indican y explica su significado:

a) Una fuente tarda 50 segundos en llenar una garrafa de 4 litros.

b) Estoy en clase 6 horas y el recreo dura 30 minutos

c) Tengo 12 € y mi hermano tiene 6 €

d) Pago 15 € por 6 litros de aceite

Actividades del libro: 48 y 49 (pág. 121)

2.- MAGNITUDES PROPORCIONALES

Magnitudes directamente proporcionales

Dos magnitudes son directamente proporcionales (d.p.) si al aumentar la primera el doble, el triple, ..., la segunda también aumenta el doble, el triple, ...

Ejemplo: Supongamos que 3 dvd´s cuestan 12 €. Entonces el doble de dvds, 6 dvd´s, valen el doble, 24 €, etc

Podemos formar una tabla:

x = número de dvd´s	3	6	...
y = precio (€)	12	24	...

Cuando dos magnitudes son d.p. las razones podemos formar proporciones entre las cantidades correspondientes. Por ejemplo: $\frac{3}{12} = \frac{6}{24}$ ó $\frac{12}{3} = \frac{24}{6}$ ó $\frac{6}{3} = \frac{24}{12}$

Fijándonos en la 2ª proporción vemos que $\frac{12}{3} = \frac{24}{6} = 4$. Es decir, $\frac{y}{x} = 4$. Luego, y = 4x

Se dice que 4 es una constante de la proporcionalidad directa.
En este caso, significa que 1 dvd vale 4 €

Siempre que se cumpla que el cociente entre las cantidades sea constante las magnitudes son d.p.

Magnitudes inversamente proporcionales

Dos magnitudes son inversamente proporcionales (i.p.) si al aumentar la primera el doble, el triple, ..., la segunda disminuye la mitad, la tercera parte, ...

Ejemplo: Supongamos que 6 obreros tardan 10 días en hacer un trabajo. Entonces, el doble de obreros, 12 obreros, tardarán la mitad, 5 días, etc.

Podemos formar una tabla:

x = número de obreros	6	12	...
y = número de días	10	5	...

Cuando dos magnitudes son i.p. el producto entre las cantidades correspondientes es constante.

En el ejemplo anterior, 6.10 = 12.5. Es decir, x.y = 60. Despejando, $y = \frac{60}{x}$.

Se dice que 60 es la constante de la proporcionalidad inversa es 60

Siempre que se cumpla que el producto sea constante las magnitudes van a ser i.p.

Magnitudes no proporcionales

Dos magnitudes son no proporcionales cuando no son ni directa ni inversamente proporcionales. Por ejemplo, la edad y la estatura no son proporcionales. Tampoco lo son el lado de un cuadrado y su superficie.

ACTIVIDADES

1.- La velocidad que lleva un coche y el tiempo que tarda en hacer un determinado recorrido son magnitudes i.p.

a) Rellena la siguiente tabla

velocidad (km/h)	60	100	120	150
tiempo (h)	5			
espacio(km)	300	300	300	300

b) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad inversa?

2.- Sabiendo que las magnitudes son d.p. completa la tabla y halla la constante de proporcionalidad.

Magnitud A		36	45
Magnitud B	7	12	

Actividades del libro: 8, 10 (pág. 115), 51 y 52 (pág. 121)

3.- PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD. REGLAS DE TRES

Regla de tres directa

Es una técnica que nos permite calcular el valor desconocido en una proporción con magnitudes d.p. Los problemas en los que intervienen magnitudes d.p. se llaman problemas de regla de tres directa.

Ejemplo: Supongamos que 3 dvd´s cuestan 12 € y queremos averiguar cuánto valen 7 dvds.

Podemos averiguarlo de tres formas:

1) Formando una proporción $\begin{matrix} 3 \text{ dvds} & \rightarrow & 12 \text{ €} \\ 7 \text{ dvds} & \rightarrow & x \end{matrix} \Rightarrow \frac{3 \text{ dvds}}{7 \text{ dvds}} = \frac{12 \text{ €}}{x} \Rightarrow 3.x = 12.7 \Rightarrow x = \frac{12.7}{3} = 28 \text{ €}$

2) Reducción a la unidad: $\begin{matrix} 3 \text{ dvds} & \rightarrow & 12 \text{ €} \\ 1 \text{ dvd} & \rightarrow & 12:3 = 4 \text{ €} \end{matrix} \Rightarrow 7 \text{ dvds valen}: 4.7 = 28 \text{ €}$

3) Encontrando una fórmula

x = número de dvd´s	3	...
y = precio (€)	12	...

$\frac{y}{x} = \frac{12}{3} = 4$. Luego, y = 4x. El dato que tenemos es x = 7 ⇒ y = 4.7 = 28 €

Regla de tres inversa

Es una técnica que nos permite calcular la cantidad desconocida cuando tenemos magnitudes i.p. Los problemas con dos magnitudes i.p. se llaman problemas de regla de tres inversa.

Ejemplo: Supongamos que 6 obreros tardan 10 días en hacer un trabajo y queremos averiguar cuántos obreros necesitamos para terminar el trabajo en 4 días.

$$6 \text{ obreros} \xrightarrow{\text{tardan}} 10 \text{ días}$$
$$x \text{ obreros} \xrightarrow{\text{tardan}} 4 \text{ días}$$

Por la propiedad de las magnitudes i.p. se cumple 6.10 = x.4 . Despejando, $x = \frac{6.10}{4} = 15$ obreros

ACTIVIDADES

1.- Al colgar un peso de 30 gramos de un muelle, éste se ha alargado 5 cm.
a) ¿Cuántos cm se alargará si le colgamos un peso de 45 gramos?
b) ¿Qué peso debemos colgar para que el alargamiento sea de 1 metro?

2.- Con el agua de un bidón puedo llenar 240 botellas de 1,5 litros.
a) ¿Cuántas botellas de 2 litros podré llenar?
b) Si uso 72 botellas, ¿qué capacidad tiene cada una?
c) ¿Cuánta agua tengo en el bidón?

3.- Cuatro pintores tardan doce días en pintar una casa.
a) ¿Cuánto tardarían en pintar la misma casa si hubiese seis pintores?
b) ¿Cuántos pintores se necesitan para pintar la casa en cuatro días?

4.- Una fuente ha tardado 24 segundos en llenar un bidón de 30 litros.
a) ¿Cuánto se tardará en llenar un bidón de 20 litros?
b) ¿Cuántos litros llenará en 2 minutos?

5.- Al repartir cierta cantidad de dinero entre 6 personas cada uno recibe 20 €
a) ¿Cuánto recibirían si se repartiese entre 15 personas? b) ¿Cuánto dinero se repartió?

6.- Un barco que navega a 24 km/h ha tardado en hacer un recorrido 12 horas.
a) ¿Cuánto tardará en hacer el mismo recorrido otro barco que navega a 32 km/h?
b) ¿Qué velocidad debe llevar el barco si quiere hacer el recorrido en 4 h?

Actividades del libro: 56, 57, 60 y 61 (pág. 121)

4.- PORCENTAJES

Los porcentajes o tantos por ciento expresan la razón entre dos magnitudes directamente proporcionales e indican la cantidad o valor de una de ellas que corresponde al valor 100 de la otra. Por ejemplo, si nos dicen que el 70% de los alumnos del instituto está vacunado contra la hepatitis, quiere decir que, por cada 100 alumnos, 70 están vacunados.

$$\text{Es decir } 75\% = \frac{75}{100} = 0{,}75 \text{ .}$$

Como podemos ver los porcentajes, las fracciones y los decimales están relacionados:
- Si queremos pasar un porcentaje a decimal se divide entre 100.
- Si queremos pasar un decimal a porcentaje tenemos que multiplicar por 100.

Por ejemplo, $0{,}025 \xrightarrow{.\,100} 2{,}5\%$

Si queremos calcular, por ejemplo, el 2,5% de 300 €, lo más fácil es pasar el porcentaje a decimal: 0,025 . 300 = 7,5 €

Porcentajes habituales

Observa $50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ Por tanto, hallar el 50% es lo mismo que calcular la mitad

$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ $75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$ $1\% = \frac{1}{100}$ $10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ $20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

Para resolver problemas con porcentajes podemos usar reglas de tres directas.

Cálculo del porcentaje de una cantidad

Si queremos calcular el porcentaje de una cantidad lo más rápido y sencillo es pasar el porcentaje a decimal. Por ejemplo $2{,}5\%$ de $300\ € = \frac{2{,}5}{100}$ de $300\ € = 2{,}5.300 : 100 = 7{,}5\ €$

Aunque también se podría calcular así: 2,5% de 300 € = 0,025 . 300 = 7,5 €.

O también usando una regla de tres directa: $\begin{matrix} 100\% \to 300\ € \\ 2{,}5\% \to x \end{matrix} \Rightarrow x = \frac{2{,}5\ .\ 300}{100} = 7{,}5\ €$

Cálculo del total conocido el porcentaje

Por ejemplo, supongamos que el 30% de los peces de un acuario murieron por una enfermedad. Si murieron 6 peces, ¿cuántos peces había?

Solución: Llamando P al número de peces, el problema lo podemos plantear de varias formas:

1) Usando el porcentaje como un decimal: 30% de P = 6 → 0,3P = 6 → P = 6 : 0,3 = 20 peces

2) Usando una regla de tres directa: $\begin{matrix} 100\% \to x \text{ peces} \\ 30\% \to 6 \text{ peces} \end{matrix} \Rightarrow x = \frac{6\ .\ 100}{30} = 20 \text{ peces}$

Cálculo del % en una proporción

Hay situaciones donde conocemos el total y la parte y queremos saber qué % representa.

Ejemplo:

En un club deportivo había inscritas 1840 personas, pero al año solamente quedaron 1288. ¿Qué tanto por ciento abandonó el club?

Solución: Observa que abandonaron 1840 – 1288 = 552 personas de un total de 1840.

Es decir, $\frac{552}{1840} = 0{,}3 \xrightarrow{.\ 100} 30\%$

También se puede hacer usando la proporcionalidad: $\begin{matrix} 100\% \to 1840 \text{ personas} \\ x \to 552 \text{ personas} \end{matrix} \Rightarrow x = \frac{552\ .\ 100}{1840} = 30\%$

ACTIVIDADES

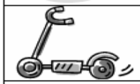
1.- En una bolsa hay bolas blancas y verdes. Sabiendo que hay 15 bolas blancas y 25 verdes, calcula el porcentaje de bolas blancas y de bolas verdes.

2.- Se repartió una cantidad de dinero entre Ana, Juan y Rosa de modo que a Ana le correspondió el 40%, el 25% a Juan y el resto, 700 €, a Rosa.
a) ¿Qué porcentaje le correspondió a Rosa?
b) ¿Cuánto dinero se repartió?
c) ¿Cuánto dinero le correspondió a Ana y a Juan?

3.- En un examen de matemáticas suspendió el 25% de los alumnos. Si aprobaron 18 alumnos, ¿cuántos alumnos hicieron el examen?

4.- Los habitantes de Villalbolut están muy orgullosos de su parque. Es una gran zona verde poblada de árboles, arbustos, flores y en la que viven gran variedad de aves. Dispone de amplias zonas para pasear, hacer deporte, jugar, etc. lo que hace que todos, grandes y pequeños, disfruten del "pulmón" de esta villa. Jugando por la zona infantil hay 8 niños y 12 niñas, y cada uno lleva un triciclo o un patinete.

a) Completa la siguiente tabla.

	NIÑOS	NIÑAS	Total
	2	5	
			
Total			

b) ¿Qué porcentaje de pequeños tiene un triciclo?

c) De los niños, ¿qué porcentaje tiene un patinete?

5.- Una aleación de aluminio y cobre contiene 8,5 kg de aluminio y 1,5 kg de cobre. ¿Cuál es el tanto por ciento de cada uno de los metales en la aleación?

6.- Un hospital tiene 200 camas ocupadas, lo que representa el 80% de todas las camas del hospital. ¿Cuántas camas tiene el hospital?

7.- El embalse de agua que abastece a una ciudad se encuentra al 27% de su capacidad y tiene 108 km^3 de agua. ¿Cuál es la capacidad total del embalse?

8.- Unos ciclistas han recorrido 45 km de una etapa que tiene 180 km. ¿Qué porcentaje de la etapa les queda?

Actividades del libro: 17, 18, 23, 26, 28, 29 (pág. 117), 34, 35 (pág. 119) y 64 (pág. 122)