1.- POTENCIAS DE EXPONENTE NATURAL

Concepto de potencia

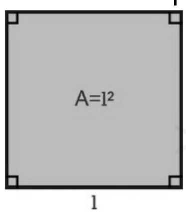
Una potencia es una forma simplificada de escribir un producto de factores iguales.

Por ejemplo, 4^3 es una potencia: $\underset{\text{base}}{4}^{\overset{\text{exponente}}{3}} = \underbrace{4\cdot 4\cdot 4}_{3\text{veces}}$

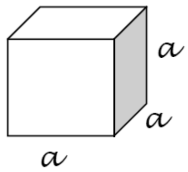
El factor que se repite se llama base y el número de veces que aparece la base como factor se llama exponente.

En general, a^n $\left\{\begin{array}{l}\text{Exponente}\\ \text{Base}\end{array}\right.$ $\quad a^n = \underbrace{a\ldots\ldots a}_{n\text{ veces}}$

Las potencias de exponente 2 se leen "elevado al cuadrado" por su relación con un cuadrado ya que el área, A, de un cuadrado se calcula multiplicando lado por lado, o sea $A = l \,.\, l = l^2$.



Las potencias de exponente 3 se leen "elevado al cubo" por su relación con un cubo ya que el volumen, V, de un cubo es $V = a \cdot a \cdot a = a^3$.



Uso de la calculadora científica para calcular potencias

Cualquier potencia se puede hallar con la calculadora científica CASIO. Por ejemplo, 2^{15} se calcula así:

2 $\boxed{\wedge}$ 15 $\boxed{=}$. El resultado es 32 768

Potencias de base 10

Observa: $10^1 = 10$ $\quad 10^2 = 10 \,.\, 10 = 100$ $\quad 10^3 = 10 \,.\, 10 \,.\, 10 = 1\,000$ $\quad$ etc .

La regla es $\boxed{10^m = 1\underbrace{0\ldots\ldots0}_{m\text{ ceros}}}$. *Ejemplo*: $10^8 = 100\,000\,000$

Para calcular una potencia de base 10 se pone un 1 y se añaden tantos ceros como indica el exponente.

Producto de un número por una potencia de base 10

Observa $35.10 = 350$; $35.10^2 = 35.100 = 3\,500$; $35.10^3 = 35\,000$; etc.

En general, para multiplicar un número natural por una potencia de base 10 se añaden tantos ceros como indica el exponente.

Recíprocamente, un número con "muchos" ceros se puede expresar usando productos de números naturales por potencias de base 10:

Por ejemplo, $70\,400\,000\,000 = 704.100\,000\,000 = 704.10^8$

Este tipo de expresiones permite comparar números muy grandes de forma sencilla.

Por ejemplo, $24.10^{12} > 24.10^7$, pues $12 > 7$ $\qquad 19.10^{40} > 17.10^{40}$ pues $19 > 17$

División de un número terminado en ceros entre una potencia de base 10

Observa:

5 207 000 000 : 10^5 = 5 207 000 000 : 100 000 = 52 070 470 000 : 10^4 = 470 000 : 10 000 = 47.

En general, para dividir un número natural entre una potencia de base 10 se eliminan tantos ceros como indica el exponente.

Potencias de base negativa y exponente natural

- *Base negativa y exponente par*

Observa:

$$(-3)^2 = \overbrace{(-3)(-3)}^{\text{nº par de factores negativos}} = +3.3 = 3^2 = 9 \qquad (-3)^4 = \overbrace{(-3)(-3)(-3)(-3)}^{\text{nº par de factores negativos}} = +3.3.3.3 = 3^4 = 81\text{, etc}$$

Luego, si la base es negativa y el exponente es par el resultado de la potencia es positivo.

En general, si n es par, $\boxed{(-a)^n = a^n}$

- *Base negativa y exponente impar*

Observa:

$$(-2)^3 = \overbrace{(-2)(-2)(-2)}^{\text{nº impar de factores negativos}} = -2.2.2 = -2^3 = -8 \qquad (-2)^5 = \overbrace{(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)}^{\text{nº impar de factores negativos}} = -2.2.2.2.2 = -2^5 = -243\text{, etc}$$

Luego, si la base es negativa y el exponente es impar el resultado de la potencia es negativo.

En general, si n es impar, $\boxed{(-a)^n = -a^n}$

ACTIVIDADES

1.- Escribe en forma de potencia de base 10: a) 1 000 000 000 = $10^{\square}$ b) 100 000 000 000 = $10^{\square}$

2.- Expresa las siguientes cantidades como un número natural por una potencia de base 10:

a) La distancia de la Tierra al Sol, 150 millones de kilómetros

b) La población de la Tierra, seis mil millones de habitantes

c) El radio de la Tierra, 6 400 000 m

3.- Determina el valor de x: a) $(-3)^x = 81$ b) $(-2)^7 = x$ c) $(-1)^{16} = x$ d) $(-5)^x = -125$

Actividades del libro: 3, 9 (pág. 50), 94 y 99 (pág. 62)

2.- PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS

Producto de potencias de la misma base

$$\text{Observa: } 2^5.2^3 = \overbrace{2.2.2.2.2}^{5\text{ veces}}.\overbrace{2.2.2}^{3\text{ veces}} = \overbrace{2.2.2.2.2.2.2.2}^{8\text{ veces}} = 2^8 = 2^{5+3}$$

Para multiplicar potencias de la misma base se deja la misma base y se suman los exponentes

$$\boxed{a^m a^n = a^{m+n}}$$

Nota : No hay propiedades para la suma o resta de potencias. Por ejemplo:

$2^3 + 2^2 \neq 2^5$ ya que $8+4 \neq 32$ $2^3 - 2^2 \neq 2^1$ ya que $8 - 4 \neq 2$

División de potencias de la misma base

Observa: $2^7 : 2^4 = \dfrac{2^7}{2^4} = \dfrac{\overbrace{2.2.2.2.2.2.2}^{7\text{ veces}}}{\underbrace{2.2.2.2}_{4\text{ veces}}} = \dfrac{\overbrace{\cancel{2.2.2.2}}^{4\text{ veces}} . \overbrace{2.2.2}^{3\text{ veces}}}{\underbrace{\cancel{2.2.2.2}}_{4\text{ veces}}} = \overbrace{2.2.2}^{3\text{ veces}} = 2^3 = 2^{7-4}$

Para dividir potencias de la misma base se deja la misma base y se restan los exponentes

$$\boxed{a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

Potencias de exponente cero

Observa $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{2^3}{2^3} = 2^{3-3} = 2^0 \\ \\ \dfrac{2^3}{2^3} = \dfrac{8}{8} = 1 \end{array}\right. \Rightarrow 2^0 = 1$ En general, un número elevado a 0 es igual a 1: $\boxed{a^0 = 1}$

Potencia de una potencia

Observa: $\left(3^2\right)^5 = \overbrace{3^2.3^2.3^2.3^2.3^2}^{5\text{ veces}} = \overbrace{3.3 . 3.3 . 3.3 . 3.3 . 3.3}^{10\text{ veces}} = 3^{10} = 3^{2.5}$

Para calcular la potencia de una potencia se deja la misma base y se multiplican los exponentes:

$$\boxed{\left(a^m\right)^n = a^{mn}}$$

Producto y división de potencias del mismo exponente

Observa: $2^3 . 5^3 = 2.2.2 . 5.5.5 = (2.5).(2.5).(2.5) = (2.5)^3$. $x^2 . y^2 = x.x . y.y = x.y . x.y = (x.y)^2$.

Para multiplicar potencias del mismo exponente se multiplican las bases y se deja el mismo exponente: $\boxed{a^m b^m = (ab)^m}$

Observa: $\dfrac{3^4}{5^4} = \dfrac{\overbrace{3.3.3.3}^{4\text{ veces}}}{\overbrace{5.5.5.5}^{4\text{ veces}}} = \overbrace{\dfrac{3}{5}.\dfrac{3}{5}.\dfrac{3}{5}.\dfrac{3}{5}}^{4\text{ veces}} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^4$.

Para dividir potencias del mismo exponente se dividen las bases y se deja el mismo exponente:

$$\boxed{\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m}$$

Nota : no hay propiedades para que no tengan nada en común , como por ejemplo : $2^3 \cdot 5^2 \neq 10^5$ ya que $8 \cdot 25 \neq 100\ 000$. En estos casos, hay que calcular cada potencia y luego operar.

Potencia de un producto

Observa: $(3.5)^4 = \overbrace{(3.5).(3.5).(3.5).(3.5)}^{4\text{ veces}} = \overbrace{3.3.3.3}^{4\text{ veces}} . \overbrace{5.5.5.5}^{4\text{ veces}} = 3^4 5^4$.

Para calcular la potencia de un producto se eleva cada factor al exponente de la potencia:

$$\boxed{(ab)^m = a^m b^m}$$

ACTIVIDADES

1.- Desarrolla las potencias: a) $(5ab)^3$ b) $(-2x^3)^2$ c) $(-2xy^2z)^5$

2.- Reduce a una sola potencia y, si es posible, calcúlala: a) x^2y^2 b) m^5n^5 c) $a^4b^4c^4d^4$ d) $\frac{15^6}{3^6}$ e) $\frac{6^7}{(-6)^7}$

Actividades del libro: 16, 18 y 20 (pág. 53)

3.- RAÍCES CUADRADAS

Cuadrados perfectos

Se llaman cuadrados perfectos a los resultados de calcular los cuadrados de los números naturales

En esta tabla tienes los 15 primeros cuadrados perfectos:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cuadrados perfectos	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2	11^2	12^2	13^2	14^2	15^2
	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225

Raíz cuadrada de un número

La raíz cuadrada de un número es otro número que multiplicado por sí mismo (o sea elevado al cuadrado) nos dé el número inicial.

Una raíz cuadrada es exacta cuando el resultado es un número entero.
Podemos observar que sólo es exacta la raíz cuadrada de un cuadrado perfecto:
$\sqrt{1^2}=\sqrt{1}=1$ $\sqrt{2^2}=\sqrt{4}=2$ $\sqrt{3^2}=\sqrt{9}=3$ $\sqrt{4^2}=\sqrt{16}=4$, etc

Si una raíz cuadrada no es exacta se puede calcular de forma aproximada.
Por ejemplo, $\sqrt{18} \approx 4$ pues $4^2 = 16$ y 16 es el cuadrado perfecto más próximo a 18 menor que 18.
La diferencia $18 - 4^2 = 2$ se llama <u>resto</u> de la raíz cuadrada.

Hay algunos problemas que se resuelven hallando la raíz cuadrada.
Por ejemplo, si quieres construir un cuadrado que tenga 64 cm^2 de superficie, el lado debe medir $\sqrt{64} = 8$ cm

ACTIVIDADES

1.- Ordena de mayor a menor las siguientes raíces: $\sqrt{400}$, $\sqrt{36}$, $\sqrt{100}$, $\sqrt{25}$

2.- Juan tiene un solar rectangular de 50 m de largo y 18 m de ancho. Teresa tiene otro solar cuadrado de la misma superficie que el de Juan. ¿Cuánto medirá el lado del cuadrado?

Actividades del libro: 32, 33, 35 (pág. 55) y 104 (pág. 63)