1.- Relación de divisibilidad. Múltiplos y divisores

Relación de divisibilidad: Un número es divisible por otro si al hacer la división el resto es 0 (división exacta).

Por ejemplo, 15 es divisible por 5 porque la división de 15 entre 5 es exacta $\begin{array}{r|l} 15 & 5 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$

Esto significa que podemos distribuir 15 flores en 5 jarrones sin que sobre ninguna flor

Cuando dos números, como 15 y 5, tienen una relación de divisibilidad decimos que:

El mayor es múltiplo del menor. El menor es divisor del mayor

En el ejemplo de las flores:

15 es múltiplo de 5 y 5 es un divisor de 15

Cálculo de los múltiplos de un número: Los múltiplos de un número contienen un número exacto de veces a dicho número. Por ejemplo, 28 es múltiplo de 4 porque lo contiene exactamente 7 veces.

$$\overbrace{\boxed{4}\ \boxed{4}\ \boxed{4}\ \boxed{4}\ \boxed{4}\ \boxed{4}\ \boxed{4}}^{28} \qquad 28 = 4 . 7$$

Podemos decir también 28 es múltiplo de 7 porque lo contiene exactamente 4 veces

$$\overbrace{\boxed{7}\ \boxed{7}\ \boxed{7}\ \boxed{7}}^{28} \qquad 28 = 7 . 4$$

Para calcular los múltiplos de un número se multiplica dicho número por los números naturales

Por ejemplo, los múltiplos de 6 son: M(6) = {6, 12, 18, 24, 30, 36, ... }

Cómo puedes observar:

- cualquier número tiene infinitos múltiplos
- los múltiplos de 2 van de 2 en 2; los múltiplos de 3 van de 3 en 3; etc.

Cálculo de los divisores de un número: Sabemos que los divisores de un número caben un número exacto de veces en dicho número.

Vamos a calcular, por ejemplo, los divisores del número 28

División	Producto	Divisores
28 : 1 = 28	28 = 1 . 28	1 y 28
28 : 2 = 14	28 = 2 . 14	2 y 14
28 : 3 No es divisible	-	-
28 : 4 = 7	28 = 4 . 7	4 y 7
28 : 5 No es divisible	-	-
28 : 6 No es divisible	-	-
28 : 7 = 4	28 = 7 . 4	4 y 7 (se repiten)
D(28) = { 1, 2, 4, 7, 14, 28 }		

Puedes observar que:

- cualquier número, excepto el 1, tiene por lo menos 2 divisores, el número 1 y el mismo número.

- el número de divisores es finito. En este ejemplo, 28 tiene 6 divisores

- si un número se descompone en factores entonces cada factor es un divisor de dicho número.

Por ejemplo, 6 = 2.3 → 2 y 3 son divisores (o factores) de 6

ACTIVIDADES

1.- Juega con tu compañero al juego "tachando múltiplos o divisores".
Primero tenéis que dibujar un cuadrado con los 36 primeros números, como este:

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

Reglas del juego:
Empieza cualquier jugador que debe tachar un número par del tablero. En la jugada siguiente, el otro jugador debe tachar un múltiplo o divisor del elegido por el contrincante. Se siguen las jugadas con las mismas condiciones hasta que un jugador no puede tachar ningún número. Dicho jugador habrá perdido el juego.
Actividades del libro: 24, 26, 27 y 30 (pág. 13) y 117 (pág. 24)

2.- CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Son unas reglas que sirven para averiguar, sin tener dividir, si un número es divisible por otro

Vamos a ver los criterios más importantes:
Divisibilidad por 2: Observa que los múltiplos de 2 son M(2) = 2, 4, 6, 8, 10, 12, ... , los números pares.
Todos terminan en 0 o en cifra par
Un número es divisible por 2 si acaba en 0 o en cifra par

Divisibilidad por 3: Observa que los múltiplos de 3 son M(3) = {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33,.... }
En todos ellos la suma de sus cifras siempre da un múltiplo de 3
Por ejemplo, el número 50 271 es divisible por 3 pues la suma de sus cifras es 5+0+2+7+1 = 15 y 15 es divisible por 3.
Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras da múltiplo de 3

Divisibilidad por 5: Observa que los múltiplos de 5 son M(5) = {5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, ...}
Todos terminan en 0 o en 5
Por ejemplo, los números 74 295 y 603 180 son divisibles por 5, pues terminan en 0 ó en 5.
Un número es divisible por 5 si acaba en 0 o en 5

Divisibilidad por 9: Observa que los múltiplos de 9 son: M(9) = 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, , ...
En todos ellos la suma de sus cifras siempre da un múltiplo de 9
Un número es divisible por 9 si la suma de sus cifras da múltiplo de 9

Divisibilidad por 10: Observa que los múltiplos de 10 son: 10, 20, 30, 40, ... Todos terminan en 0
Un número es divisible por 10 si acaba en 0

Divisibilidad por 11: Observa que los múltiplos de 11 son
M(11) = {11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 110, 121, 132, 143, ... }
En todos ellos la suma de las cifras que ocupan los lugares pares menos la de las que ocupan los lugares impares siempre da 0 o un múltiplo de 11.
Por ejemplo, los números 7 205 y 94 721 son divisibles por 11

$$\overset{I}{7}\underset{P}{2}\overset{I}{0}\underset{P}{5}\begin{cases} \text{Suma de las cifras de lugar par}: 2+5=7 \\ \text{Suma de las cifras de lugar impar}: 7+0=7 \end{cases} \to 7-7=0$$

$$\overset{I}{9}\underset{P}{5}\overset{I}{6}\underset{P}{1}\overset{I}{2}\begin{cases} \text{Suma de las cifras de lugar par}: 5+1=6 \\ \text{Suma de las cifras de lugar impar}: 9+6+2=17 \end{cases} \to 17-6=11$$

Un número es divisible por 11 si la suma de las cifras de los lugares pares menos la de los lugares impares siempre da 0 o múltiplo de 11

ACTIVIDADES

1.- Durante la última ola de calor una fábrica ha creado hoy 828102 cubitos de hielo. ¿Podría empaquetarlos todos en bolsas de 3 cubitos? ¿Y en bolsas de 11 cubitos?

2.- Un supermercado tiene 65 yogures a punto de caducar. Para venderlos antes de la fecha límite se les ocurre hacer packs de yogures con un descuento. ¿Podrían hacer paks de 3 yogures? ¿Y de 5 yogures?

3.- Juan tiene una caja fuerte. Para poder abrirla necesita saber la combinación de cinco cifras pero ha olvidado la penúltima cifra. Sabe que es 106 __ 8 y también recuerda que el número es divisible por 11.
a) Averigua la cifra que falta. b) El número obtenido, ¿es divisible por 6?

Actividades del libro: 34 y 41 (pág. 15) y 90 (pág. 22)

3.- NÚMEROS PRIMOS

Un número es primo si sólo tiene dos divisores, el 1 y el mismo número. El 1 no se considera primo. Los primeros números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... Hay infinitos números primos

Los números que no son primos se llaman números compuestos.

Eratóstenes fue un matemático griego que ideó un método para descubrir los números primos del 1 al 100 llamado criba de Eratóstenes. Consiste en escribir los números naturales del 1 al 100 en una tabla e ir tachando los múltiplos de 2, salvo el 2. Después se hace lo mismo con los múltiplos de 3, de 5, de 7, ... Los números que queden sin tachar son los números primos menores que 100.

Criba de Eratóstenes

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Posteriormente este mismo método fue usado para averiguar números primos

Una forma de averiguar si un número es primo o compuesto es: se comprueba si es divisible por los primos, empezando por el 2, hasta que el cociente sea menor que el divisor.
Si fuese divisible por algún primo, entonces el número es compuesto. En otro caso, el número es primo.

ACTIVIDADES

1.- Aplica la criba de Eratóstenes para obtener los números comprendidos entre el 101 y el 150.

2.- En un aula hay 30 sillas distribuidas en 5 filas de 6 sillas cada una. Se rompe una silla.
¿Se podrán colocar las sillas ahora en filas con igual número de sillas en cada fila? Razona tú respuesta.
Actividad del libro: 91 (pág. 22)

4.- FACTORIZACIÓN

Cualquier número compuesto se puede descomponer como producto de números primos
Factorizar un número es descomponerlo en factores primos

Método tradicional

30	2
15	3
5	5
1	

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

12	2
6	2
3	3
1	

$12 = 2^2 \cdot 3$

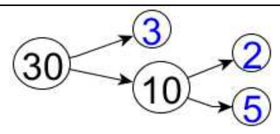
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

$81 = 3^4$

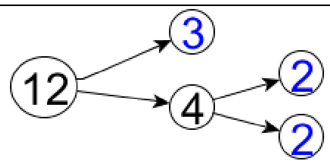
360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

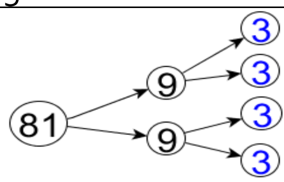
Método del diagrama en árbol



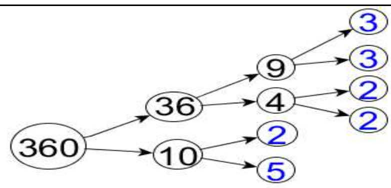
$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$



$12 = 2^2 \cdot 3$



$81 = 3^4$



$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

ACTIVIDADES

1.- Explica por qué $4^7 \cdot 5^3$ no es la factorización de ningún número
2.- Asocia a cada número su descomposición en factores primos:

45 24 75 72 63 84 12

$3^2.7$ $2^3.3^2$ $3^2.5$ $2^2.3.7$ 3.5^2 $2^3.3$ $2^2.3$

Actividad del libro: 97 (pág. 23)

5.- MCD y MCM

Máximo común divisor de dos o más números (m.c.d.)

El máximo común divisor de dos o más números es el mayor de los divisores comunes a dichos números. Por ejemplo, vamos a calcular el m.c.d.(12 y 18)

Paso 1: Se calculan los divisores de cada número

D(12) →	1	2	3	4	6	12
D(18) →	1	2	3	6	9	18

Paso 2: Se señalan los divisores comunes de los dos números

D(12) →	1	2	3	4	6	12
D(18) →	1	2	3	6	9	18

Paso 3: Se toma el mayor de los divisores comunes (ese es el m.c.d).
En este caso, m.c.d(12 y 18) = 6

Este mismo procedimiento se puede usar para calcular el m.c.d. de más de dos números

Mínimo común múltiplo de dos o más números (m.c.m.)

El mínimo común múltiplo de dos o más números es el menor de los múltiplos comunes a todos los números. Vamos a calcular el m.c.m.(6, 9 y 15)
Se calculan los primeros múltiplos de cada número hasta que obtengamos un múltiplo que sea común a todos los números

M(6) →	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	…
M(9) →	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	….					
M(15) →	15	30	45	60	75	90	……									

m.c.m.(6, 9 y 15) = 90

Cálculo del mcd y del mcm factorizando los números

Por ejemplo, vamos a calcular el m.c.d.(48 y 60) y el m.c.m.(48 y 60)

Se factoriza cada número: $48 = 2^4 . 3$ $\qquad$ $60 = 2^2 . 3 . 5$

- Para hallar el m.c.d. se multiplican los factores primos comunes elevados al menor exponente que tengan (serían 2^2 y 3) $\Rightarrow$ m.c.d.(48 y 60) = $2^2 . 3 = 4 . 3 = 12$

- Para hallar el m.c.m. se multiplican los factores primos comunes y no comunes elevados al mayor exponente que tengan (serían 2^4 , 3 y 5) $\Rightarrow$ m.c.m.(48 y 60) = $2^4 . 3 . 5 = 16 . 3 . 5 = 240$

Propiedades del m.c.d. y m.c.m.

1) Si el único divisor común es el 1 o no hay factores primos comunes en su factorización, entonces el m.c.d. es 1 y el m.c.m es el producto de los números
En este caso, los números son **primos relativos o primos entre sí**.
Por ejemplo, 4 y 9 son primos relativos, m.c.d.(4, 9) = 1 m.c.m.(4, 9) = 4 . 9 = 36

2) Si hay un número que es divisor de todos los demás, entonces este número es el m.c.d.
Por ejemplo, m.c.d.(6, 30, 42) = 6, porque 6 es divisor de 6, 30 y 42

3) Si hay un número que es múltiplo de todos los demás números, entonces este número es el m.c.m.
Por ejemplo, m.c.m.(4, 12, 24) = 24, porque 24 es múltiplo de 4, 12 y 24

4) El producto del m.c.d. por el m.c.m. de dos números es igual al producto de dichos números:

$$\text{m.c.d}(a, b) \ . \ \text{m.c.m}(a, b) = a.b$$

Por ejemplo, m.c.d(6, 9) = 3 , m.c.m(6, 9) = 18 ; luego 3 . 18 = 6 . 9

Método de Euclides para el cálculo del mcd de dos números:
1º) Hacemos la división del número mayor entre el número menor
2º) Dividimos el divisor entre el resto; y así sucesivamente hasta obtener como resto cero.
Entonces, el mcd de los dos números es el último divisor usado en las divisiones.
Ejemplo : Hallemos el MCD(96, 45)

$$\begin{array}{r|l} 96 & 45 \\ \hline 6 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 45 & 6 \\ \hline 3 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6 & 3 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

Luego MCD(96, 45) = 3

Además de los métodos que hemos visto hay otros métodos para el cálculo del m.c.d. o m.c.m.

ACTIVIDADES

Actividades del libro: 46 (pág. 16), 51 (pág. 17), 61 (pág. 18) y 64 (pág. 19)

6.- PROBLEMAS USANDO EL MCD O EL MCM

El m.c.d. o m.c.m. nos permite resolver muchos problemas de la vida cotidiana. En ellos tenemos primero que averiguar si hay que hallar el m.c.d. o el m.c.m.

Ejemplos:

1) Se tienen dos toneles de vino, uno con 60 litros y otro con 40 litros. Se quiere envasar el vino en garrafas iguales del mayor tamaño posible, sin mezclar el vino.
a) ¿Cuál debe ser la capacidad de cada garrafa? b) ¿Cuántas garrafas hacen falta?

<u>Resolución</u>

$\text{La capacidad debe ser el mcd}(60,\ 40) = \text{mcd}(2^2.3.5,\ 2^3.5) = 2^2.5 = 20 \text{ litros}$

$\text{Como en total hay } 60 + 40 = 100 \text{ litros, el nº de garrafas es } 100 : 20 = 5 \text{ garrafas}$

2) Luís viaja a Granada cada 15 días y su hermana Teresa cada 20 días. Si hoy han coincidido los dos, ¿dentro de cuántos días vuelven a coincidir en Granada?

<u>Resolución</u>

$\text{El nº de días debe ser el mcm}(15,\ 20) = \text{mcm}(3.5,\ 2^2.5) = 2^2.3.5 = 60 \text{ días}$

ACTIVIDADES

1.- Para construirnos una cabaña hemos ido al bosque y hemos talado dos árboles: uno mide 9 m y el otro 12 m. Queremos cortarlos para obtener unas columnas para la cabaña, pero queremos que todas las columnas que saquemos de estos árboles midan lo mismo para que el techo no esté inclinado. También queremos que sean lo más altas posibles para tener espacio suficiente.
a) ¿Cuánto tendrá que medir cada columna? b) ¿Cuántas columnas sacaremos de estos árboles?

2.- Te vas de excursión con tus amigos y te han encargado que hagas los bocadillos. En la panadería sólo quedaban tres barras: una de 36 cm, otra de 54 cm y otra de 90 cm. Si quieres que todos los bocadillos sean iguales y que, además, sean lo más grandes posibles,
a) ¿cuánto tendrá que medir cada bocadillo? b) ¿Cuántos bocadillos haremos?

3.- Tienes una habitación rectangular cuyas paredes largas miden 450 cm cada una y las cortas miden 300 cm. Quieres que unos grafiteros amigos tuyos te la decoren, así que piensas en dividir las paredes en trozos iguales para que todos tengan el mismo espacio para dibujar. Si quieres que cada grafiti tenga el máximo espacio posible,
a) ¿cada cuántos centímetros tendrás que dividir las paredes? b) ¿Cuántos grafitis cabrán?

4.- El dragón que tengo en el corral pone un huevo cada 12 días, y mi unicornio cocina unas patatas fritas para chuparse los dedos cada 8 días. Si el 1 de enero disfruté de un huevo con patatas, ¿cuándo podré volver a probar ese manjar?

5.- En una tienda de mascotas venden una peluca para ranas cada 5 minutos, un bañador para patos cada 6 minutos y una depiladora de gorilas cada 10 minutos. Si acaban de vender uno de cada, ¿cuánto tiempo pasará hasta que vendan otra vez los tres productos juntos?

6.- Con el dinero que ganaste en el concurso de matemáticas, te has comprado una mansión.
En el camino de entrada has puesto un farol cada 2 m, una fuente de Coca Cola cada 21 m, y un señor calvo con traje que te dice lo guay que eres cada 7 m. Si empiezas a contar la distancia desde la puerta de la mansión, ¿Cuánto tendrás que caminar para volver a encontrarte un calvo trajeado que beba Coca Cola al lado de un farol?

Actividades del libro:

50 (pág. 16), 53, 55, 56 (pág. 17), 67 (pág. 19), 119, 121, 122 (pág. 24) y 123 (pág. 25)