# 1.- EXPERIMENTOS ALEATORIOS Y SUCESOS

## Experimento aleatorio

Es aquel cuyo resultado depende del azar y, aunque conocemos todos los resultados, no se puede predecir de antemano el resultado que se va a obtener.

Por ejemplo, lanzar un dado o una moneda son experimentos aleatorios.

Los experimentos aleatorios pueden ser *simples* o *compuestos*.

Son simples aquellos que constan de una sola etapa. Por ejemplo, echar una moneda al aire.

Son compuestos si constan de varias etapas. Por ejemplo, lanzar un dado cinco veces o el experimento que consiste en tirar una moneda y luego sacar una bola de una bolsa.

Los experimentos que no son aleatorios se llaman experimentos deterministas

## Espacio muestral de un experimento aleatorio

Es el conjunto formado por todos los resultados que podemos obtener al hacer el experimento.

El espacio muestral se representa con la letra E.

Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, el espacio muestral es $E = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$

## Suceso aleatorio

Es el conjunto formado por algunos resultados de un experimento aleatorio.

Los sucesos se representan con letras mayúsculas

Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, A = salir número par = $\{2, 4, 6\}$ es un suceso

Probabilidad de un suceso aleatorio: Si en un experimento aleatorio todos los resultados tienen la misma posibilidad de aparecer, para calcular la probabilidad de un suceso se divide el número de casos favorables al suceso entre el número de casos posibles:

**REGLA DE LAPLACE** : $$p(A) = \frac{\text{Casos favorables a que ocurra A}}{\text{Casos posibles}} = \frac{\text{Nº de elementos de A}}{\text{Nº de elementos de E}}$$

La probabilidad nos indica si es más o menos frecuente que ocurra dicho suceso.

La probabilidad de un suceso siempre es un número entre 0 y 1 (ambos incluidos): $0 \leq p(A) \leq 1$, pues el número de casos favorables siempre es menor o igual al número de casos posibles

## Suceso seguro

Es aquel que siempre ocurre al realizar el experimento.

Por ejemplo, al lanzar una moneda el suceso A = "salir cara o cruz" = { C , X } siempre ocurre, pues al lanzar la moneda siempre saldrá cara o cruz. A es un suceso seguro.

Observa que A coincide con el espacio muestral, **E**.

### *Probabilidad del suceso seguro*

La probabilidad del suceso seguro es 1 : $\boxed{p(E) = 1}$

Por tanto, si $E = \{x_1, x_2, ...., x_n\}$, entonces $p(x_1) + p(x_2) + ... + p(x_n) = 1$

## Suceso imposible

Es aquel que nunca ocurre. Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, el suceso A = "salir un número mayor que 6" nunca ocurre. A es un suceso imposible.

El suceso imposible es el conjunto "que no tiene ningún elemento"

Este conjunto se llama conjunto vacío y se representa con el símbolo $\varnothing$

### *Probabilidad del suceso imposible*

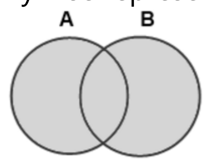
La probabilidad del suceso imposible es 0 : $\boxed{p(\varnothing) = 0}$

## 2.- OPERACIONES CON SUCESOS

### Unión de sucesos

La unión de dos sucesos A y B es otro suceso formado "juntando" los elementos de A y B.

La unión de A y B se representa por A U B.




Suceso AUB

A U B significa: "ocurre A ó B"

*Ejemplo*

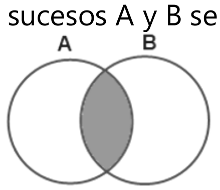
En el lanzamiento de un dado, si tomamos los sucesos: $\begin{cases} A = \text{"salir nº par"} = \{2,4,6\} \\ B = \text{"salir nº primo"} = \{2,3,5\} \end{cases}$

entonces A U B = "salir par o primo" = {2, 3, 4, 5, 6}

### Intersección de sucesos

La intersección de dos sucesos A y B es otro suceso formado por los elementos comunes de A y B.

La intersección de los sucesos A y B se representa por $A \cap B$.




Suceso A∩B

$A \cap B$ significa: "ocurre A y B"

*Ejemplo*

En el lanzamiento de un dado, si tomamos los sucesos: $\begin{cases} A = \text{"salir nº par"} = \{2,4,6\} \\ B = \text{"salir nº primo"} = \{2,3,5\} \end{cases}$

entonces $A \cap B$ = salir par y primo = { 2 }

*Probabilidad de la unión de dos sucesos*

$$\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$$

### Sucesos compatibles y sucesos incompatibles

Dos sucesos A y B son *compatibles* cuando pueden ocurrir al mismo tiempo.

Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado los sucesos

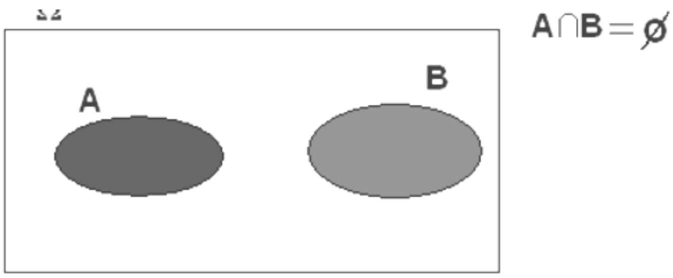
A = "salir un número par" B = "salir un número primo" son compatibles,

pues si sale un 2 ocurren los dos sucesos a la vez: 2 es un número par y también es un número primo.

Si A y B son compatibles, hay elementos comunes a los sucesos y por tanto $A \cap B \neq \varnothing$

Dos sucesos A y B son *incompatibles* cuando no pueden ocurrir al mismo tiempo.
Por ejemplo, si sacamos al azar una carta de la baraja, los sucesos
A = "salir un basto" B = "salir una espada"
son incompatibles, pues no puede salir a la vez un basto y una espada.

Si A y B son incompatibles, no hay elementos comunes a los sucesos y por tanto $A \cap B = \varnothing$



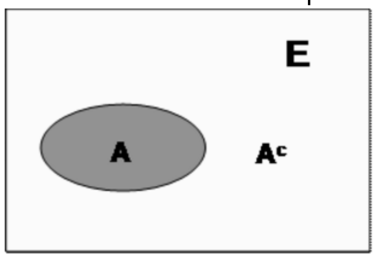

Si A y B son incompatibles, $p(A \cap B) = 0 \rightarrow$ $\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B), \text{ siendo A y B incompatibles}}$

## Suceso contrario o complementario

Dado un suceso A, el suceso contrario o complementario de A es aquel que expresa lo contrario que el suceso A.

Se representa por $A^C$ o también por $\overline{A}$.

El suceso $A^C$ está formado por los elementos del espacio muestral que no están en A




Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, si A = "salir número par" = {2, 4, 6} , entonces el suceso contrario es $A^C$ = "no salir número par" = "salir número impar" = {1, 3, 5}

*Probabilidad del suceso contrario*

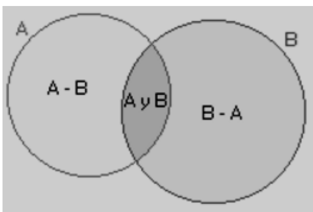
$\boxed{p(A^C) = 1 - p(A)}$ $\boxed{p(A) = 1 - p(A^C)}$

## Diferencia de dos sucesos.

Dados dos sucesos A y B, se define **A – B** como el suceso que expresa: ocurre A y no ocurre B.

Es decir $A - B = A \cap B^C$.

Los elementos de A – B se obtienen tomando los elementos de A que no estén en B.




*Probabilidad de la diferencia de sucesos*: $\boxed{\begin{cases} p(A-B) = p(A \cap B^c) = p(A) - p(A \cap B) \\ p(B-A) = p(B \cap A^c) = p(B) - p(A \cap B) \end{cases}}$

Ejercicio 1 En el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado equilibrado con las caras numeradas del 1 al 6 y observar el resultado se consideran los siguientes sucesos:
A: "obtener un número mayor que 4", B: "obtener un número par".

a) Escribe los elementos de cada uno de los siguientes sucesos: $A$ ; $B$ ; $A^C \cup B$ ; $A \cap B^C$ ; $(A \cap B)^C$

b) Calcula las probabilidades $p(A^C \cap B^C)$ y $p(A^C \cup B^C)$

SOLUCIÓN

a) $A = \{5, 6\}$ $B = \{2, 4, 6\}$ $A^C \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

$A \cap B^C = \{5\}$ $(A \cap B)^C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $A^C \cap B^C = \{1, 3\}$

b). Luego, $p(A^C \cap B^C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $A^C \cup B^C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Luego, $p(A^C \cup B^C) = \frac{5}{6}$

## 3.- PROBABILIDAD EN EXPERIMENTOS COMPUESTOS

### Probabilidad condicionada

Dados dos sucesos, A y B, con $p(B) \neq 0$, se llama probabilidad de A condicionada a B a la probabilidad de que ocurra A sabiendo que ha ocurrido B.
La probabilidad de A condicionada a B se representa por $p(A / B)$ y se puede calcular usando la fórmula:

$$\boxed{p(A / B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}}$$

Si despejamos $p(A \cap B)$ de la fórmula anterior se obtiene:

$$\boxed{p(A \cap B) = p(A/B) \cdot p(B)}$$

Razonando de forma análoga para B condicionado a A: $\boxed{p(B / A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}}$

$$\boxed{p(A \cap B) = p(B/A) \cdot p(A)}$$

### Sucesos independientes

Dos sucesos A y B son independientes si
$p(A/B) = p(A)$ y $p(B/A) = p(B)$

Por tanto, si A y B son independientes

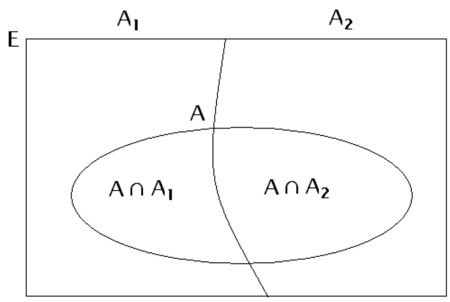
$$\boxed{p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)}$$

Se puede demostrar que si A y B son independientes, entonces también son independientes
$A$ y $B^C$ , $A^C$ y $B$ , $A^C$ y $B^C$

## Teorema de la probabilidad total

Si $A_1$ , $A_2$ son sucesos incompatibles con $A_1 \cup A_2 = E$ y A es un suceso cualquiera

$$P(A) = P(A_1).\ P(A/A_1) + P(A_2).\ P(A/A_2)$$




$$P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2)$$

Luego:

$$\boxed{P(A) = P(A_1).\ P(A/A_1) + P(A_2).\ P(A/A_2)}$$

## Fórmulas de Bayes

Si $A_1$ , $A_2$ son sucesos incompatibles tales que $A_1 \cup A_2 = E$ y A es un suceso de probabilidad no nula, entonces se cumple:

$$\boxed{P(A_1/A) = \frac{P(A_1).P(A/A_1)}{P(A)}} \qquad \boxed{P(A_2/A) = \frac{P(A_2).P(A/A_2)}{P(A)}}$$

donde, según el teorema de la probabilidad total, $P(A) = P(A_1).\ P(A/A_1) + P(A_2).\ P(A/A_2)$

**Ejercicio 2** Sean A y B dos sucesos aleatorios independientes de los que se conoce que p(A) = 0.5 p(B) = 0.3

a) Dí, razonadamente, si A y B son sucesos incompatibles.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que suceda A y no suceda B?

c) Calcula $p(A / B^C)$

SOLUCIÓN

a) Como son independientes, $p(A \cap B) = p(A) . p(B) = 0,5 . 0,3 = 0,15 \neq 0$. Luego, $A \cap B \neq \emptyset$

Por tanto, A y B NO son incompatibles (es decir, son compatibles)

b) $p(A \cap B^C) = p(A) - p(A \cap B) = 0,5 - 0,15 = 0,35$

También se podría calcular teniendo en cuenta que A y $B^C$ son también independientes.

Luego, $p(A \cap B^C) = p(A) . p(B^C) = 0,5 . (1 - 0,3) = 0,5 . 0,7 = 0,35$

c) $p(A/B^C) = \dfrac{p(A \cap B^C)}{p(B^C)} = \dfrac{0,35}{0,7} = 0,5$ , que es igual a p(A) pues A y $B^C$ son independientes.

**Ejercicio 3** De los sucesos aleatorios independientes A y B se sabe que p(A) = 0.3 , $p(B^C) = 0.25$

Calcula las siguientes probabilidades: a) $p(A \cup B)$ b) $p(A / B^C)$

SOLUCIÓN

a) Como son independientes, $p(A \cap B) = p(A) . p(B) = 0,3 . 0,75 = 0,225$.

Luego, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,3 + 0,75 - 0,225 = 0,825$

b) $p(A/B^C) = \dfrac{p(A \cap B^C)}{p(B^C)} = \dfrac{p(A) - p(A \cap B)}{p(B^C)} = \dfrac{0,3 - 0,225}{0,25} = 0,3$

que es igual a p(A) pues A y $B^C$ son también independientes.

Ejercicio 4 Sean dos sucesos, A y B, tales que p(A) = 0,5 p(B) = 0,4 y p(A/B) = 0,3 .

a) Calcula la probabilidad de que ocurran ambos sucesos a la vez

$$p(A \cap B) = p(A/B) \cdot p(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 = \boxed{0{,}12}$$

b) Halla la probabilidad de A U B

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}12 = \boxed{0{,}78}$$

c) Razona si A y B son independientes o no

Como p(A) . p(B) = 0,5 . 0,4 = 0,2 ≠ p(A ∩ B) = 0,12, los sucesos no son independientes (Son sucesos dependientes)

Ejercicio 5 Se consideran dos sucesos A y B asociados a un experimento aleatorio. Se sabe que p(A) = 0.8 , p(B) = 0.7 , p(A U B) = 0.94

a) ¿Son A y B sucesos independientes? b) Calcula p(A / B)

SOLUCIÓN

a) Como p(A U B) = p(A) + p(B) – p(A ∩ B) → p(A ∩ B) = p(A) + p(B) – p(A U B) = 0,8 + 0,7 – 0,94 = 0,56

Por otra parte, p(A) . p(B) = 0,8 . 0,7 = 0,56 .

Luego, A y B son independientes porque p(A ∩ B) = p(A) . p(B)

b) $p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{0{,}56}{0{,}7} = 0{,}8$ , que es igual a p(A) , pues A y B son independientes

Ejercicio 6 Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que: p(A) = 0.4 , p(B) = 0.5 y p(A ∩ B) = 0.2

a) Calcula las siguientes probabilidades: p(A U B) , p(A / B) y $p(B / A^C)$

b) Razona si A y B son sucesos incompatibles.

c) Razona si A y B son independientes.

SOLUCIÓN

a) p(A U B) = p(A) + p(B) – p(A ∩ B) = 0,4 + 0,5 – 0,2 = 0,7 $\qquad p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4$

$$p(B/A^c) = \frac{p(B \cap A^C)}{p(A^C)} = \frac{p(B) - p(B \cap A)}{p(A^C)} = \frac{0{,}5 - 0{,}2}{0{,}6} = 0{,}5$$

b) No son incompatibles, porque p(A ∩ B) = 0,2 ≠ 0 (Es decir, son compatibles)

c) p(A ∩ B) = 0,2 y p(A) . p(B) = 0,4 . 0,5 = 0,2.

Luego, A y B son independientes porque p(A ∩ B) = p(A) . p(B).

Ejercicio 7 Sean dos sucesos, A y B, tales que p(A) = 0.5 , p(B) = 0.4 y p(A / B) = 0.5

a) Halla la probabilidad de que se verifique alguno de los dos sucesos.

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \rightarrow p(A \cap B) = p(A/B) \cdot p(B) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}2$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}7$$

b) Calcula la probabilidad de que no se verifique B si se ha verificado A.

$$p(B^C/A) = \frac{p(B^C \cap A)}{p(A)} = \frac{p(A) - p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{0{,}5 - 0{,}2}{0{,}5} = 0{,}6 = 60\%$$

c) ¿Son independientes los sucesos A y B? Razone la respuesta.

p(A ∩ B) = 0,2 y p(A) . p(B) = 0,5 . 0,4 = 0,2.

Luego, A y B son independientes porque p(A ∩ B) = p(A) . p(B).

Ejercicio 8 Se tienen dos dados, uno (A) con dos caras rojas y cuatro verdes, y otro (B) con dos caras verdes y cuatro rojas.
Se lanza una moneda; si sale cara se arroja el dado A y si sale cruz el dado B.

a) Halla la probabilidad de obtener una cara de color rojo.
b) Si sabemos que ha salido una cara de color verde en el dado, ¿cuál es la probabilidad de que en la moneda haya salido cara?

a) p(cara roja con dado A) + p(cara roja con dado B) = $\frac{1}{2}.\frac{2}{6}+\frac{1}{2}.\frac{4}{6}=\frac{1}{2}$

b) $p\,(\text{cara en moneda / cara verde en dado}) = \dfrac{p\,(\text{cara en moneda y verde en dado})}{p\,(\text{verde en dado})} = \dfrac{\frac{1}{2}.\frac{4}{6}}{\frac{1}{2}.\frac{4}{6}+\frac{1}{2}.\frac{2}{6}} = \dfrac{\frac{4}{12}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$

Ejercicio 9 Una persona lanza dos veces consecutivas un dado equilibrado, con las caras numeradas del 1 al 6.
a) Determina el número de resultados del espacio muestral de este experimento aleatorio.
b) Sea A el suceso "la mayor de las puntuaciones obtenidas es menor que 4" y B el suceso "la primera puntuación es impar". Halla la probabilidad de A y la de B.
c) ¿Son independientes A y B?

SOLUCIÓN

a) Número de resultados: $6^2 = 36$

b) A = { 1-1 , 1-2 , 1-3 , 2-1 , 2-2 , 2-3 , 3-1 , 3-2 , 3-3 } p(A) = $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

p(B) = $\frac{1}{2}$ pues B corresponde a la mitad de los resultados

c) A ∩ B = { 1-1 , 1-2 , 1-3 , 3-1 , 3-2 , 3 -3 } p(A ∩ B) = $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ p(A) . p(B) = $\frac{1}{4}.\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

Luego, A y B NO son independientes porque p(A ∩ B) ≠ p(A) . p(B).

Ejercicio 10 Laura tiene un dado con tres caras pintadas de azul y las otras tres de rojo. María tiene otro dado con tres caras pintadas de rojo, dos de verde y una de azul. Cada una tira su dado y observan el color.
a) Describe el espacio muestral asociado y las probabilidades de los sucesos elementales.
b) Si salen los dos colores iguales gana Laura; y si sale el color verde, gana María. Calcula la probabilidad que tiene cada una de ganar.

SOLUCIÓN

a) E = {AR , AV , AA , RR, RV , RA }

p(AR) = $\frac{3}{6}.\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$ p(AV) = $\frac{3}{6}.\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$ p(AA) = $\frac{3}{6}.\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

p(RR) = $\frac{3}{6}.\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$ p(RV) = $\frac{3}{6}.\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$ p(RA) = $\frac{3}{6}.\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

b) p(gane Laura) = p(AA) + p(RR) = $\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$ p(gane María) = p(AV) + p(RV) = $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

Las dos tienen la misma probabilidad de ganar

Ejercicio 11 Un dado tiene seis caras, tres de ellas marcadas con un 1, dos marcadas con una X y la otra marcada con un 2. Se lanza tres veces ese dado.
a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener tres veces el 1?
b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos X y un 2 en cualquier orden?
c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener tres resultados diferentes?

SOLUCIÓN

Lanzamos el dado. Sea ① = sacar un 1 ⊗ = Sacar una x ② = Sacar un 2

Según el enunciado, $p(①) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $p(⊗) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $p(②) = \frac{1}{6}$

Hay que tener en cuenta que el resultado en un lanzamiento no depende del resultado en el lanzamiento anterior.

Luego, todos los resultados, los del experimento de lanzar el dado 3 veces, son independientes (y también son incompatibles)

a) $p(①①①) = p(①) \cdot p(①) \cdot p(①) = [p(①)]^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

b) $p(⊗⊗② \cup ②⊗⊗ \cup ⊗②⊗ \cup ⊗⊗②) = \left[\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\right] \cdot 3 = \left[\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{9}\right] \cdot 3 = \frac{3}{54} = \frac{1}{18}$

c) $p(①⊗② \cup ①②⊗ \cup ⊗①② \cup ⊗②① \cup ②①⊗ \cup ②⊗①) = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\right] \cdot 6 = \frac{1}{36} \cdot 6 = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Ejercicio 12 Se lanza una moneda tres veces y se consideran los sucesos:
A: “Obtener al menos dos veces cara” y B: “Obtener cara en el segundo lanzamiento”.
a) Describe el espacio muestral asociado al experimento. Calcule P(A) y P(A U B).
b) Los sucesos A y B, ¿son independientes?, ¿son incompatibles?

SOLUCIÓN

a) Espacio muestral: E = { ccc , ccx , cxc , cxx , xcc , xcx , xxc , xxx }

A = { ccc , ccx , cxc , xcc } B = { ccc , ccx , xcc , xcx } $p(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ $p(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

b) Como A ∩ B = { ccc , ccx , xcc } ≠ Ø , A y B NO son incompatibles (es decir, son compatibles)

Además, como A ∩ B = {ccc , ccx , xcc }, $p(A \cap B) = \frac{3}{8}$ y $p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, A y B NO son independientes porque $p(A \cap B) \neq p(A) \cdot p(B)$.

Ejercicio 13 Se sabe que el 80% de los visitantes de un determinado museo son andaluces y que el 55% son andaluces y adultos. Además, el 17% de los visitantes son no andaluces y adultos. Se elige, al azar, un visitante del museo: a) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea adulto?
b) Si es adulto, ¿cuál es la probabilidad de que sea andaluz?

SOLUCIÓN

A = ser andaluz B = ser adulto

Según el enunciado, $p(A) = 0{,}8$ $p(A \cap B) = 0{,}55$ $p(A^C \cap B) = 0{,}17$

a) Como $p(A^C \cap B) = p(B) - p(A \cap B)$ → $p(B) = p(A^C \cap B) + p(A \cap B) = 0{,}17 + 0{,}55 = 0{,}72$

Por tanto, $p(B^C) = 1 - p(B) = 1 - 0{,}72 = 0{,}28 = 28\%$

b) $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0{,}55}{0{,}72} = 0{,}7639 \rightarrow 76{,}39\%$

**Ejercicio 14** Se sabe que dos alumnos de la asignatura de Matemáticas asisten a clase, de forma independiente, el primero a un 85% de las clases y el segundo a un 35%. Tomado al azar un día de clase, calcula la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:
a) Que los dos hayan asistido a clase ese día.
b) Que alguno de ellos haya asistido a clase ese día.
c) Que haya asistido a clase el segundo, sabiendo que el primero no ha asistido.

SOLUCIÓN

A = asistir a clase el primer alumno B = asistir a clase el segundo alumno

Según los datos: A y B son independientes p(A) = 0,85 p(B) = 0,35

a) p(A ∩ **B) = p(A) . p(B) = 0,85 . 0,35 = 0,2975 = 29,75%**

b) p(A **U** B) = p(A) + p(B) – p(A ∩ B) = 0,85 + 0,35 – 0,2975 = 0,9025 = 90,25%

c) $p(B/A^C) = \dfrac{p(B \cap A^C)}{p(A^C)} = \dfrac{p(B) - p(A \cap B)}{p(A^C)} = \dfrac{0,35 - 0,2975}{0,15} = 0,35 = 35\%$,

que es igual a p(B), pues B y $A^C$ son también independientes.

**Ejercicio 15** El 65% de la población española adulta no fuma, el 15% fuma ocasionalmente y el resto fuma habitualmente. Elegidos al azar dos adultos españoles, calcula las probabilidades de los siguientes sucesos:
a) Los dos sean no fumadores.
b) Uno de ellos sea no fumador y el otro sea fumador ocasional.

SOLUCIÓN

A = Fumar B = Fumar ocasionalmente C = Fumar habitualmente

Según el enunciado, $p(A^C) = 0,65$ p(B) = 0,15 p(C) = 1 – (0,65+0,15) = 0,2

a) 0,65 . 0,65 = 0,4225 = 42,25% b) 0,65 . 0,15 = 0,0975 = 9,75%

Lógicamente, hay independencia de sucesos

**Ejercicio 16** En un Instituto de Educación Secundaria el 40% de los alumnos juegan al fútbol, el 30% juegan al baloncesto y el 20% practican ambos deportes.
a) Si un alumno, elegido al azar, juega al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que no juegue al baloncesto?
b) ¿Son independientes los sucesos “jugar al fútbol” y “jugar al baloncesto”?

SOLUCIÓN

A = jugar al fútbol B = jugar al baloncesto

Según el enunciado, p(A) = 0,4 p(B) = 0,3 p(A ∩ B) = 0,2

a) $p(B^C/A) = \dfrac{p(B^C \cap A)}{p(A)} = \dfrac{p(A - B)}{p(A)} = \dfrac{p(A) - p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{0,4 - 0,2}{0,4} = 0,5 = 50\%$

b) p(A ∩ B) = 0,2 y p(A) . p(B) = 0,4 . 0,3 = 0,12.

Luego, A y B NO son independientes porque p(A ∩ B) ≠ p(A) . p(B).

**Ejercicio 17** Se cree que hay una vuelta hacia estilos de baile más populares, por lo que se realiza una encuesta a estudiantes de bachillerato, resultando que al 40% les gusta la salsa, al 30% les gusta el merengue y al 10% les gusta tanto la salsa como el merengue.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que a un estudiante le guste el merengue si le gusta la salsa?
b) ¿Y la de que a un estudiante le guste el merengue si no le gusta la salsa?
c) ¿Son independientes los sucesos “gustar la salsa” y “gustar el merengue”? ¿Son compatibles?

SOLUCIÓN

A = Le gusta la salsa B = Le gusta el merengue

Según el enunciado, p(A) = 0,4 p(B) = 0,3 p(A ∩ B) = 0,1

a) $p(B/A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{0,1}{0,4} = 0,25 \rightarrow 25\%$

b) $p(B/A^c) = \dfrac{p(B \cap A^c)}{p(A^c)} = \dfrac{p(B - A)}{1 - p(A)} = \dfrac{p(B) - p(A \cap B)}{1 - p(A)} = \dfrac{0,3 - 0,1}{0,6} = 0,3333 \rightarrow 33,33\%$

c) Son incompatibles, porque $p(A \cap B) = 0,1 \neq 0$

$p(A \cap B) = 0,1$ y $p(A) . p(B) = 0,4 . 0,3 = 0,12$.

Luego, A y B NO son independientes porque $p(A \cap B) \neq p(A) . p(B)$.

Ejercicio 18 En una localidad hay solamente dos supermercados A y B. El 58% de los habitantes compra en el A, el 35% en el B y el 12% compra en ambos.
Si se elige un ciudadano al azar, calcula la probabilidad de que: a) Compre en algún supermercado.
b) Compre solamente en un supermercado.
c) Compre en el supermercado A, sabiendo que no compra en B.

SOLUCIÓN

A = Comprar en A B = Comprar en B

Según el enunciado, $p(A) = 0,58$ $p(B) = 0,35$ $p(A \cap B) = 0,12$

a) $p(A \cup B) = 0,58 + 0,35 - 0,12 = 0,81 = 81\%$

b) $p(A \cap B^c) + p(A^c \cap B) = p(A) - p(A \cap B) + p(B) - p(A \cap B) = p(A) + p(B) - 2.p(A \cap B) = 0,69 = 69\%$

c) $p(A/B^c) = \dfrac{p(A \cap B^c)}{p(B^c)} = \dfrac{p(A) - p(A \cap B)}{1 - p(B)} = \dfrac{0,58 - 0,12}{0,65} = 0,7077 \rightarrow 70,77\%$

Ejercicio 19 En una ciudad, el 55% de la población consume aceite de oliva, el 30% de girasol y el 20% ambos tipos de aceite. Se escoge una persona al azar:
a) Si consume aceite de oliva, ¿cuál es la probabilidad de que consuma también aceite de girasol?
b) Si consume aceite de girasol, ¿cuál es la probabilidad de que no consuma aceite de oliva?

SOLUCIÓN

A = Consumir aceite de oliva B = Consumir aceite de girasol

Según el enunciado, $p(A) = 0,55$ $p(B) = 0,3$ $p(A \cap B) = 0,2$

a) $p(B/A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{0,2}{0,55} = 0,3636 = 36,36\%$

b) $p(A^c/B) = \dfrac{p(A^c \cap B)}{p(B)} = \dfrac{p(B) - p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{0,3 - 0,2}{0,3} = 0,3333 = 33,33\%$

Ejercicio 20 A la Junta General de Accionistas de una empresa asisten 105 accionistas de los cuales 45 tienen menos de 40 años y 18 más de 60 años. Sometida a votación una propuesta, es rechazada por la tercera parte de los menores de 40 años, por la tercera parte de los que están entre 40 y 60 años y por 4 personas mayores de 60 años; los demás la aceptan.
a) Calcula la probabilidad de que, elegida una persona al azar, tenga menos de 40 años y haya aceptado la propuesta.
b) La prensa afirmó que la propuesta había sido aceptada por el 80% de los asistentes, ¿es correcta la afirmación?
c) Si una persona escogida al azar ha rechazado la propuesta, ¿qué probabilidad hay de que tenga más de 60 años?

SOLUCIÓN

Podemos usar una tabla de contingencia

| | < de 40 años | > de 60 años | Resto | Total |
|---|---|---|---|---|
| Acepta la propuesta | 30 | 14 | 28 | 72 |
| Rechaza la propuesta | 15 | 4 | 14 | 33 |
| Total | 45 | 18 | 42 | 105 |

$\frac{1}{3} de\ 45 = 15$

$\frac{1}{3} de\ 42 = 14$

$a)\ \frac{30}{105} \cong 0,2857 = 28,57\%$

$b)\ p(Aceptar\ la\ propuesta) = \frac{72}{105} \cong 0,6857 = 68,57\%.$ Luego, la afirmación de la prensa es incorrecta

$c)\ \frac{4}{33} \cong 0,1212 = 12,12\%$

Ejercicio 21 Una compañía de seguros ha hecho un seguimiento durante un año a 50000 coches de la marca A, a 20000 de la marca B y a 30000 de la C, que tenía asegurados, obteniendo que, de ellos, habían tenido accidente 650 coches de la marca A, 200 de la B y 150 de la C. A la vista de estos datos:
a) ¿Cuál de las tres marcas de coches tiene menos proporción de accidentes?
b) Si, elegido al azar uno de los coches observados, ha tenido un accidente, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca C?

SOLUCIÓN

Podemos usar una tabla de contingencia

| | Marca A | Marca B | Marca C | Total |
|---|---|---|---|---|
| Tiene accidente | 650 | 200 | 150 | 1 000 |
| No tiene accidente | 49 350 | 19 800 | 29 850 | 99 000 |
| Total | 50 000 | 20 000 | 30 000 | 100 000 |

$a)\ p(tener\ accidente\ la\ marca\ A) = \frac{650}{50\ 000} = 1,3\% \quad p(tener\ accidente\ la\ marca\ B) = \frac{200}{20\ 000} = 1\%$

$p(tener\ accidente\ la\ marca\ C) = \frac{150}{30\ 000} = 0,5\%.$ Respuesta : La marca C

$b)\ p(\text{sea marca C / tiene accidente}) = \frac{150}{1000} = 15\%$

Ejercicio 22 En IES de 400 alumnos, el 45% son chicos. También se sabe que hay 108 chicos que aprueban el curso y 77 chicas que suspenden.
a) Haz la tabla de contingencia
b) Si se elige una persona al azar, halla la probabilidad de que esté suspenso sabiendo que hemos elegido un chico

SOLUCIÓN

a)

| | chicos | chicas | total |
|---|---|---|---|
| aprueban | 108 | 143 | 251 |
| suspenden | 72 | 77 | 149 |
| total | 180 | 220 | 400 |

45% de 400 = 180

b) p(suspender/chico) = $\frac{72}{180} = \boxed{40\%}$

Ejercicio 23 En un congreso de 200 jóvenes profesionales se pasa una encuesta para conocer los hábitos en cuanto a contratar los viajes por internet. Se observa que 120 son hombres y que, de estos, 84 contratan los viajes por internet, mientras que 24 de las mujeres no emplean esa vía.
Elegido un congresista al azar, calcula la probabilidad de que:
a) No contrate sus viajes por internet.
b) Use internet para contratar los viajes, si la persona elegida es una mujer.
c) Sea hombre, sabiendo que contrata sus viajes por internet.

SOLUCIÓN

Podemos usar una tabla de contingencia

| | Hombres | Mujeres | Total |
|---|---|---|---|
| Contrata por Internet | 84 | 56 | 140 |
| No contrata por Internet | 36 | 24 | 60 |
| Total | 120 | 80 | 200 |

$$a)\ p(no\ contrate\ por\ internet) = \frac{60}{200} = 30\% \qquad b)\ p(\text{contrata por internet / sea mujer}) = \frac{56}{80} = 70\%$$

$$c)\ p(\text{sea hombre / contrata por internet}) = \frac{84}{140} = 60\%$$

Ejercicio 24 Un libro tiene cuatro capítulos. El primer capítulo tiene 140 páginas, el segundo 100, el tercero 150 y el cuarto 50. El 5% de las páginas del primer capítulo, el 4% del segundo y el 2% del tercero tienen algún error. Las páginas del cuarto capítulo no tienen errores.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que, al elegir una página al azar, tenga algún error?
b) Supongamos que elegimos una página al azar y observamos que no tiene ningún error, ¿cuál es la probabilidad de que sea del segundo capítulo?

SOLUCIÓN

Podemos usar una tabla de contingencia

| | Capítulo I | Capítulo II | Capítulo III | Capítulo IV | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| Tiene errores | 7 | 4 | 3 | 0 | 14 |
| No tiene errores | 133 | 96 | 147 | 50 | 426 |
| Total | 140 | 100 | 150 | 50 | 440 |

$$5\%\ de\ 140 = 7$$
$$4\%\ de\ 100 = 4$$
$$2\%\ de\ 150 = 3$$

$$a)\ \frac{14}{440} \cong 0{,}0318 = 3{,}18\% \qquad b)\ \frac{96}{426} \cong 0{,}2254 = 22{,}54\%$$

Ejercicio 25 El 55% de los alumnos de un centro docente utiliza en su desplazamiento transporte público, el 30% usa vehículo propio y el resto va andando. El 65% de los que utilizan transporte público son mujeres, el 70% de los que usan vehículo propio son hombres y el 52% de los que van andando son mujeres.
a) Elegido al azar un alumno de ese centro, calcula la probabilidad de que sea hombre.
b) Elegido al azar un hombre, alumno de ese centro, ¿cuál es la probabilidad de que vaya andando?

SOLUCIÓN

Podemos usar una tabla de contingencia de probabilidades

| | Transporte público | Vehículo propio | Andando | Total |
|---|---|---|---|---|
| Hombres | 19,25% | 21% | 7,2% | 47,45% |
| Mujeres | 35,75% | 9% | 7,8% | 52,55% |
| Total | 55% | 30% | 15% | 100% |

$$65\%\ de\ 55\% = 35{,}75\%$$
$$70\%\ de\ 30\% = 21\%$$
$$52\%\ de\ 15\% = 7{,}8\%$$

$$a)\ \frac{47{,}45\%}{100\%} = 0{,}4745 = 47{,}45\% \qquad b)\ \frac{7{,}2\%}{47{,}45\%} \cong 0{,}1517 = 15{,}17\%$$

Ejercicio 26 De las 180 personas que asisten a un congreso médico, 100 son mujeres. Observando las especialidades de los congresistas, vemos que de las 60 personas que son pediatras 20 son mujeres. Se elige al azar una persona asistente al congreso.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y pediatra?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea hombre ni sea pediatra?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea pediatra?

SOLUCIÓN
Podemos usar una tabla de contingencia

| | Mujeres | Hombres | Total |
|---|---|---|---|
| Pediatra | 20 | 40 | 60 |
| No pediatra | 80 | 40 | 120 |
| Total | 100 | 80 | 180 |

$$a)\ \frac{20}{180} \cong 0{,}1111 = 11{,}11\% \qquad b)\ \frac{80}{180} \cong 0{,}4444 = 44{,}44\% \qquad c)\ \frac{60}{180} \cong 0{,}3333 = 33{,}33\%$$

Ejercicio 27 El 50% de los préstamos que concede un banco son para vivienda, el 30% para industria y el 20% para consumo. No se pagan el 20% de los préstamos para vivienda, el 15% de los préstamos para industria y el 70% de los préstamos para consumo.
a) Si se elige al azar un préstamo, calcula la probabilidad de que se pague.
b) Se elige un préstamo al azar que resulta impagado, ¿cuál es la probabilidad de que sea un préstamo para consumo?
c) Ante un préstamo impagado el director del banco afirma que es más probable que sea para vivienda que para consumo, ¿lleva razón el director?

SOLUCIÓN
Podemos usar una tabla de contingencia de probabilidades

| | Vivienda | Industria | Consumo | Total |
|---|---|---|---|---|
| Se paga | 40% | 25,5% | 6% | 71,5% |
| No se paga | 10% | 4,5% | 14% | 28,5% |
| Total | 50% | 30% | 20% | 100% |

$$20\%\ de\ 50\% = 10\%$$
$$15\%\ de\ 30\% = 4{,}5\%$$
$$70\%\ de\ 20\% = 14\%$$

$$a)\ \frac{71{,}5\%}{100\%} = 0{,}715 = 71{,}5\% \qquad b)\ \frac{14\%}{28{,}5\%} \cong 0{,}4912 = 49{,}12\%$$

$$c)\ p(vivienda / no\ se\ paga) = \frac{10\%}{28{,}5\%} \cong 0{,}3509 = 35{,}09\% \qquad p(consumo / no\ se\ paga) = \frac{14\%}{28{,}5\%} \cong 0{,}4912 = 49{,}12\%$$

No lleva *razón*

Ejercicio 28 Un polideportivo dispone de 100 bolas de pádel y 120 bolas de tenis. Se sabe que 65 bolas son nuevas. Además, 75 bolas de pádel son usadas. Por un error, todas las bolas se han mezclado.
a) Calcula la probabilidad de que si elegimos, al azar, una bola de tenis, ésta sea usada.
b) Calcula la probabilidad de que si elegimos, al azar, una bola, sea nueva.

SOLUCIÓN
Podemos usar una tabla de contingencia

| | Pádel | Tenis | Total |
|---|---|---|---|
| Nuevas | 25 | 40 | 65 |
| Usadas | 75 | 80 | 155 |
| Total | 100 | 120 | 220 |

$$a)\ \frac{80}{120} \cong 0{,}6667 = 66{,}67\% \qquad b)\ \frac{65}{220} \cong 0{,}2955 = 29{,}55\%$$

Ejercicio 29 Se sabe que el 44% de la población activa de cierta provincia está formada por mujeres. También se sabe que, de ellas, el 25% está en paro y que el 20% de los hombres de la población activa también están en paro.
a) Elegida, al azar, una persona de la población activa de esa provincia, calcula la probabilidad de que esté en paro.
b) Si hemos elegido, al azar, una persona que trabaja, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

SOLUCIÓN

Podemos usar una tabla de contingencia de probabilidades

| | Mujeres | Hombres | Total |
|---|---|---|---|
| En paro | 11% | 11,2% | 22,2% |
| Trabajando | 33% | 44,8% | 77,8% |
| Total | 44% | 56% | 100% |

$25\%\ de\ 44\% = 11\%$

$20\%\ de\ 56\% = 11,2\%$

$$a)\ \frac{22,2\%}{100\%} = 0,222 = 22,2\% \qquad b)\ \frac{44,8\%}{77,8\%} \cong 0,5758 = 57,58\%$$

Ejercicio 30 En un servicio técnico especializado en cámaras fotográficas, el 70% de las cámaras que se reciben son del modelo A y el resto del modelo B. El 95% de las cámaras del modelo A son reparadas, mientras que del modelo B sólo se reparan el 80%. Si se elige una cámara al azar:
a) Calcula la probabilidad de que no se haya podido reparar.
b) Si se observa que no ha sido reparada, ¿cuál es la probabilidad de que sea del modelo B?

SOLUCIÓN

Podemos usar una tabla de contingencia de probabilidades

| | Modelo A | Modelo B | Total |
|---|---|---|---|
| Se repara | 66,5% | 24% | 90,5% |
| No se repara | 3,5% | 6% | 9,5% |
| Total | 70% | 30% | 100% |

$95\%\ de\ 70\% = 66,5\%$

$80\%\ de\ 30\% = 24\%$

$$a)\ \frac{9,5\%}{100\%} = 0,095 = 9,5\% \qquad b)\ \frac{6\%}{9,5\%} \cong 0,6316 = 63,16\%$$

Ejercicio 31 Una compañía aseguradora realiza operaciones de seguros médicos y de seguros de vida. El 20% de las operaciones corresponde a seguros médicos y el resto a seguros de vida. El porcentaje de operaciones en las que no se producen retrasos en los pagos es del 10% en los seguros médicos y del 15% en seguros de vida.
a) Halla el porcentaje de operaciones en las que no se producen retrasos en los pagos.
b) De las operaciones que han sufrido retrasos en los pagos, ¿qué porcentaje corresponde a los seguros de vida?

SOLUCIÓN

Podemos usar una tabla de contingencia de probabilidades

| | Seguros médicos | Seguros de vida | Total |
|---|---|---|---|
| retrasos en los pagos | 18% | 68% | 86% |
| sin retrasos en los pagos | 2% | 12% | 14% |
| Total | 20% | 80% | 100% |

$10\%\ del\ 20\% = 2\%$

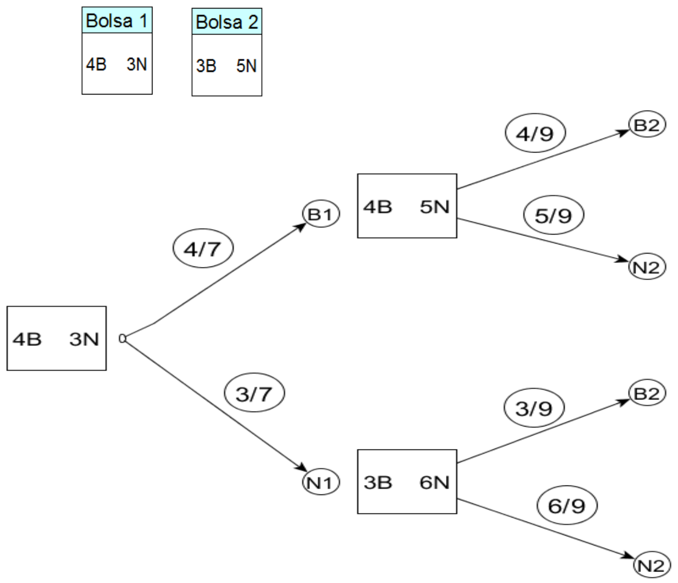
$15\%\ del\ 80\% = 12\%$

$$a)\ 14\% \qquad b)\ \frac{68\%}{86\%} = 0,7907 = 79,07\%$$

Ejercicio 32 En una primera bolsa se han colocado 4 bolas blancas y 3 negras, y en una segunda bolsa 3 blancas y 5 negras. Se saca una bola de la primera y, sin verla, se introduce en la segunda. A continuación se saca una bola de la segunda. Halla la probabilidad de que:
a) La bola extraída de la segunda bolsa sea negra.
b) La bola extraída de la primera bolsa sea negra, si sabemos que la bola extraída de la segunda ha sido blanca.

SOLUCIÓN

Podemos usar un diagrama de árbol.

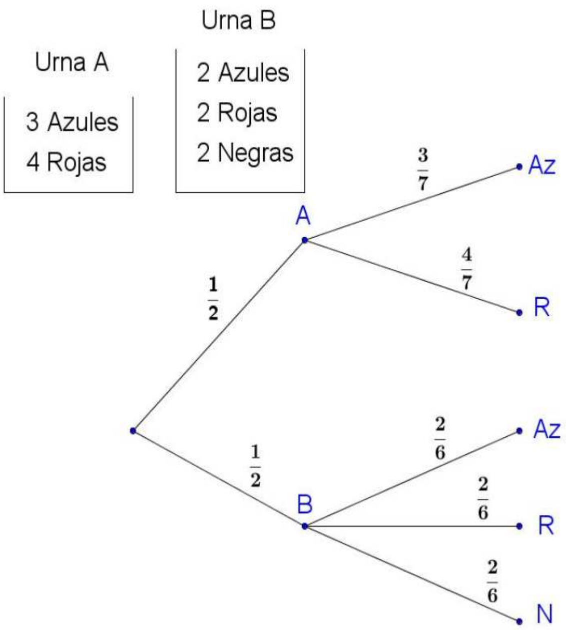



$$Sean\ los\ sucesos: \begin{cases} B_1 = la\ 1^a\ bola\ es\ blanca \\ N_1 = la\ 1^a\ bola\ es\ negra \\ B_2 = la\ 2^a\ bola\ es\ blanca \\ N_2 = la\ 2^a\ bola\ es\ negra \end{cases}$$

$$a)\ p(N_2) = p(N_2 \cap B_1) + p(N_2 \cap N_1) = \frac{4}{7}\cdot\frac{5}{9} + \frac{3}{7}\cdot\frac{6}{9} = \frac{38}{63}$$

$$b)\ p(N_1 / B_2) = \frac{p(N_1 \cap B_2)}{p(B_2)} = \frac{\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{9}}{1-\frac{38}{63}} = \frac{9}{25}$$

Ejercicio 33 Una bolsa A contiene tres bolas azules y cuatro rojas y otra bolsa B contiene dos bolas azules, dos rojas y dos negras. Se elige una bolsa al azar y, sin mirar se saca una bola.
a) Haz el diagrama de árbol de probabilidades



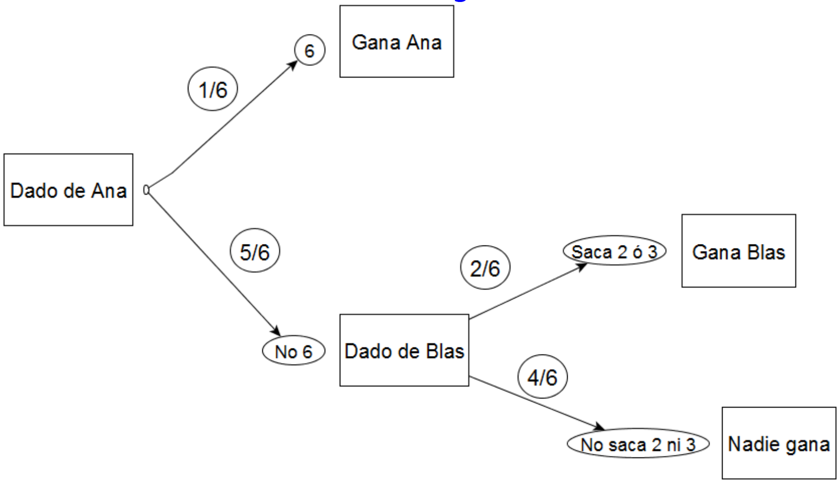

b) Si la bola extraída resulta ser azul, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la bolsa B?

$$p(B / Az) = \frac{p(B\ y\ Az)}{p(Az)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{14}+\frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{8}{21}} = \boxed{\frac{7}{16}}$$

Ejercicio 34 Ana y Blas deciden jugar con un dado de la siguiente forma:
"Ana lanza el dado y, si saca un 6, gana y se acaba el juego. En caso contrario lanza Blas, que gana si saca un 2 o un 3, y también se acaba el juego. De no ocurrir esto, la partida se acaba sin ganador.
Halla la probabilidad de los siguientes sucesos: "gana Ana", "gana Blas", "ninguno gana".

SOLUCIÓN

Podemos usar un diagrama de árbol.

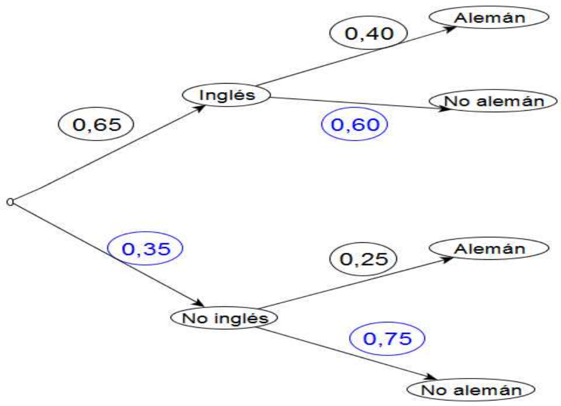



$p(gane\ Ana)=\frac{1}{6}$ $p(gane\ Blas)=\frac{5}{6}.\frac{2}{6}=\frac{5}{18}$ $p(no\ gane\ ninguno)=\frac{5}{6}.\frac{4}{6}=\frac{5}{9}$

Ejercicio 35 En una empresa, el 65% de sus empleados habla inglés, y de éstos, el 40% habla también alemán. De los que no hablan inglés, el 25% habla alemán. Se escoge un empleado al azar:
a) ¿Cuál es la probabilidad de que hable ambos idiomas? b) ¿Cuál es la probabilidad de que hable alemán?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que, sabiendo que habla alemán, hable también inglés?

SOLUCIÓN

Podemos usar un diagrama de árbol.



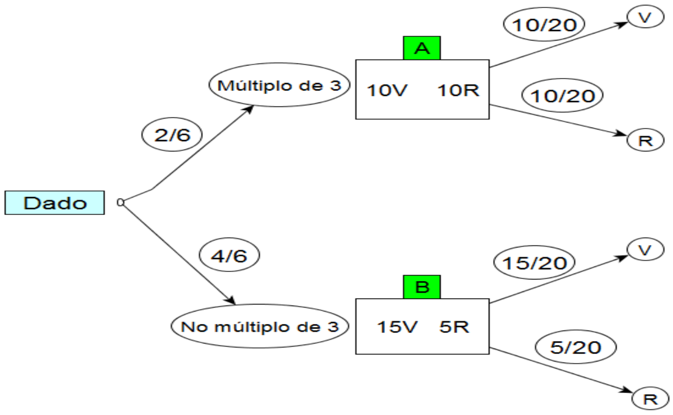

$a)\ p(hable\ inglés\ y\ alemán)=0,65\ .\ 0,40=0,26=26\%$ $b)\ p(hable\ alemán)=0,65\ .\ 0,40+0,35\ .\ 0,25=0,3475=34,75\%$

$$c)\ p(\text{hable inglés / habla alemán})=\frac{p(hable\ inglés\ y\ alemán)}{p(hable\ alemán)}=\frac{0,26}{0,3475}=0,7482=74,82\%$$

Ejercicio 36 En una urna A hay 10 bolas verdes y 10 rojas, y en otra urna B hay 15 verdes y 5 rojas.
Se lanza un dado, de forma que si sale múltiplo de 3 se extrae una bola de la urna A y en el resto de casos se extrae una bola de la urna B.
a) Calcula la probabilidad de que la bola extraída sea roja.
b) Si la bola extraída resulta ser de color verde, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

SOLUCIÓN

Podemos usar un diagrama de árbol.




$$a)\ p(R)=\frac{2}{6}\cdot\frac{10}{20}+\frac{4}{6}\cdot\frac{5}{20}=\frac{40}{120}=\frac{1}{3} \qquad b)\ p(no\ múltiplo\ de\ 3\ /\ V)=\frac{\frac{4}{6}\cdot\frac{15}{20}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$$

Ejercicio 37 Una bolsa contiene 5 bolas blancas, 3 rojas y 4 negras. Ana y Manolo practican el siguiente juego: Ana saca una bola, anota su color y la devuelve a la bolsa, a continuación Manolo extrae una bola y anota su color. Si las dos bolas extraídas tienen el mismo color gana Ana, si sólo hay una bola blanca gana Manolo, y en otro caso hay empate. a) Calcule la probabilidad de que gane Ana.
b) Calcule la probabilidad de que gane Manolo.
c) Calcule la probabilidad de que haya empate.

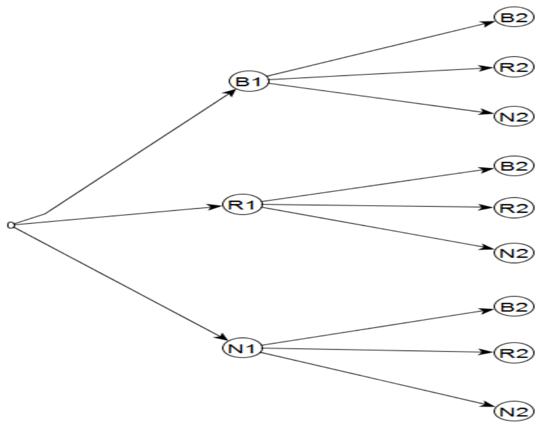
SOLUCIÓN

Podemos usar un diagrama de árbol para determinar todas las posibilidades.

| Urna |
|---|
| 5B 3R 4N |

$$Sean\ los\ sucesos: \begin{cases} B_1 = la\ bola\ de\ Ana\ es\ blanca & B_2 = la\ bola\ de\ Manolo\ es\ blanca \\ R_1 = la\ bola\ de\ Ana\ es\ roja & R_2 = la\ bola\ de\ Manolo\ es\ roja \\ N_1 = la\ bola\ de\ Ana\ es\ negra & N_2 = la\ bola\ de\ Manolo\ es\ negra \end{cases}$$

$$p(B_1)=p(B_2)=\frac{5}{12} \qquad p(R_1)=p(R_2)=\frac{3}{12} \qquad p(N_1)=p(N_2)=\frac{4}{12}$$




Como la bola se devuelve a la bolsa, hay independencia de sucesos

a) p(gane Ana) = $p(B_1B_2) + p(R_1R_2) + p(N_1N_2) = \left(\frac{5}{12}\right)^2+\left(\frac{3}{12}\right)^2+\left(\frac{4}{12}\right)^2=\frac{50}{144}\simeq 34,72\%$

b) p(gane Manolo) = $p(B_1R_2) + p(B_1N_2) + p(R_1B_2) + p(N_1B_2) = \frac{5}{12}\cdot\frac{3}{12}+\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{12}+\frac{3}{12}\cdot\frac{5}{12}+\frac{4}{12}\cdot\frac{5}{12}=\frac{70}{144}\simeq 48,61\%$

c) p(empaten) = $p(R_1N_2) + p(N_1R_2) = \frac{3}{12}\cdot\frac{4}{12}+\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{12}=\frac{24}{144}\simeq 16,67\%$

## 4.- CONCEPTO DE VARIABLE ALEATORIA. TIPOS

Una variable aleatoria (v.a.) es una función que le hace corresponder a cada resultado de un experimento aleatorio un número real.

En las v.a., la media se representa por □, la varianza por $□^2$ y la desviación típica por □.

Las v.a. se clasifican en:

*Variables aleatorias continuas*

Son aquellas que pueden tomar todos los valores de un intervalo.

Por ejemplo, son v.a. continuas la estatura o el peso de una persona, la longitud de un tornillo, el nivel de agua de un embalse, la temperatura en una ciudad a lo largo del día, etc

*Variables aleatorias discretas*

Son aquellas que toman valores aislados, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ .

*Ejemplos*:

1) Tiramos un dado dos veces y sumamos los puntos obtenidos.
Entonces X = suma de los puntos = 2 , 3 , 4 ,…., 12 es una v.a. discreta

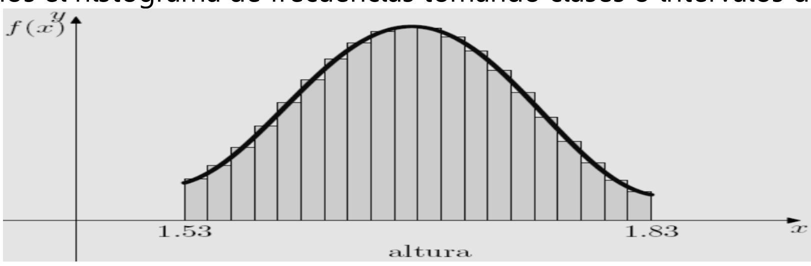
2) Lanzamos una moneda 5 veces y anotamos el número de caras que han salido.
Entonces, X = número de caras = 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 es una v.a. discreta

También son v.a. discretas, por ejemplo, el número de hijos de un matrimonio, el número de asignaturas suspensas de un alumno, el número de libros vendidos en una librería, la edad de una persona, etc

## 5.- VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS.

Consideremos la variable aleatoria continua X = estatura de los chicos de 17 años de Granada.
Supongamos que vamos preguntando a "muchos" chicos por su estatura y el más alto mide 183 cm y el más bajo 153 cm.

Dibujamos el histograma de frecuencias tomando clases o intervalos de 1,5 cm




El polígono de frecuencias se ajusta a una curva.

La función f(x) cuya gráfica es esa curva se llama *función de densidad* de X.

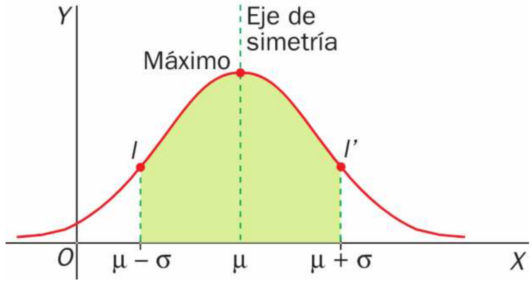
En este ejemplo, se han tomado 20 intervalos de amplitud 1,5 cm.

El área de cada rectángulo es la probabilidad de que un chico tomado al azar tenga estatura en el intervalo correspondiente.
Por ejemplo, el área del primer rectángulo corresponde aproximadamente a $p(153 < X < 154{,}5)$

La función $F(k) = p(X < k)$ se llama *función de distribución* de X

## 6.- DISTRIBUCIÓN NORMAL

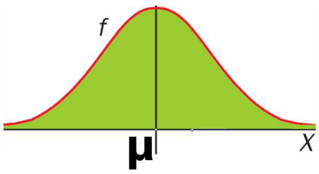
La mayoría de las variables aleatorias continuas tienen una función de densidad f(x) cuya gráfica tiene forma de campana. A esta gráfica se le llama **campana de Gauss**.
La gráfica de la función de densidad (campana de Gauss) tiene la siguiente forma:




La gráfica es simétrica respecto de la recta vertical de ecuación x = μ.
Se puede demostrar que en el intervalo (□ – □ , □ + □) se encuentran aproximadamente el 68% de los datos.
Cuando la curva de densidad tiene esta forma diremos que X sigue una **distribución normal** de media μ y desviación típica σ. Se escribe así: $X \longrightarrow N(\mu, \boldsymbol{\sigma})$

La fórmula de la función de densidad de una distribución normal es $f(x) = \dfrac{1}{\sigma.\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

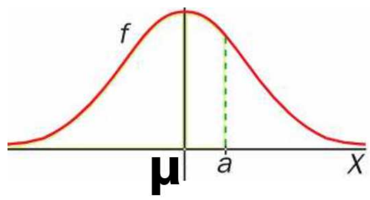
Las distribuciones de este tipo son muy corrientes en la vida real.
Propiedades elementales de la distribución normal:



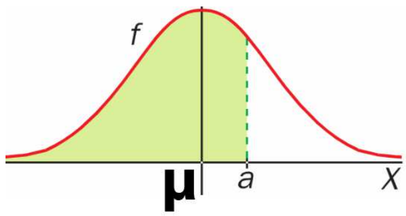

p(–∞ < X < ∞) = 1

El área entre la campana de Gauss y el eje X vale 1.

Luego, el área a la izda de □ y a la dcha de □ son iguales y cada una vale 0,5



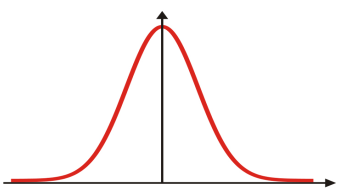

P(X = a) = área del segmento vertical que pasa por "a". Luego, en las v.a. continuas, p(X = a) = 0




p(X < a) = p( X ≤ a) = "el área que hay a la izquierda de X = a"

### Distribución N(0,1)

Si en una distribución normal $X \longrightarrow N(\mu, \boldsymbol{\sigma})$, la media es μ = 0 y la desviación típica es σ = 1, resulta entonces la distribución $Z \longrightarrow N(0,1)$.
Esta variable se llama distribución normal tipificada y la gráfica de su función de densidad es la campana de Gauss centrada en 0



## Uso de la tabla de la distribución N(0,1)

En la distribución normal $Z \longrightarrow N(0,1)$. Llamaremos $\phi(k) = p(Z < k) = p(Z \leq k)$

Para hallar $\phi(k)$, en lugar de calcular el área a la izquierda de k, se usa la siguiente tabla:

| z | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9955 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| 2,7 | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| 2,8 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| 2,9 | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |
| 3,0 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9988 | 0,9988 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9990 | 0,9990 |
| 3,1 | 0,9990 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9993 | 0,9993 |
| 3,2 | 0,9993 | 0,9993 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 |
| 3,3 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9997 |
| 3,4 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9998 |
| 3,5 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 |
| 3,6 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| 3,7 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| 3,8 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| 3,9 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 4,0 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |

Usando la tabla se puede determinar $\phi(k)$, con k entre 0 y 4,09.

Fíjate que si $k \geq 3,9$ la probabilidad se toma igual a 1.

*Ejemplo*:

Para hallar $\phi(1,24)$ buscamos en la 1ª columna el número 1,2 y en la 1ª fila 0,04.
La intersección nos da el valor 0,8925. Por tanto, $\phi(1,24) = 0,8925$

También se puede usar la tabla en orden inverso para hallar el valor de k.

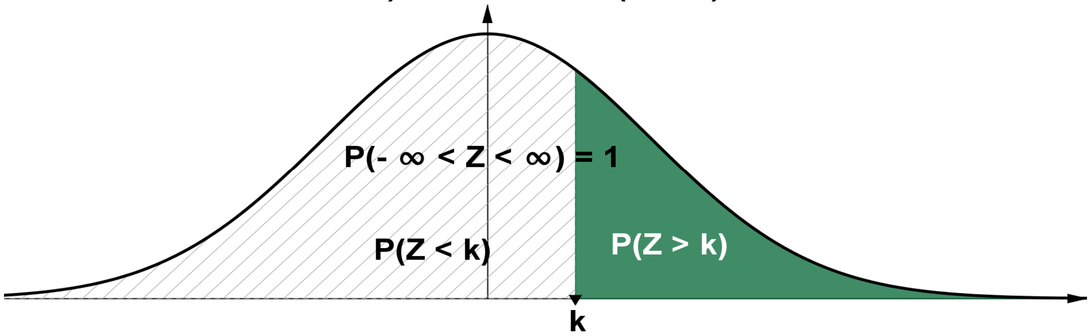
*Ejemplos*:

1) Supongamos que $\phi(k) = 0,7190$. Buscamos 0,7190 dentro de la tabla y vemos que le corresponde 0,5 (en la 1ª columna) y 0,08 (en la 1ª fila). Por tanto a = 0,58

2) Supongamos que $\phi(k) = 0,9376$. En este caso 0,9376 no está en la tabla; los valores más próximos son 0,9370 (que corresponde a $k_1 = 1,53$) y 0,9382 (que corresponde a $k_2 = 1,54$).
Como 0,9376 está prácticamente a la misma distancia de los valores encontrados, tomaremos como valor de k el punto medio de 1,53 y 1,54, es decir k = 1,535

## Reglas útiles para calcular probabilidades en la distribución N(0,1)

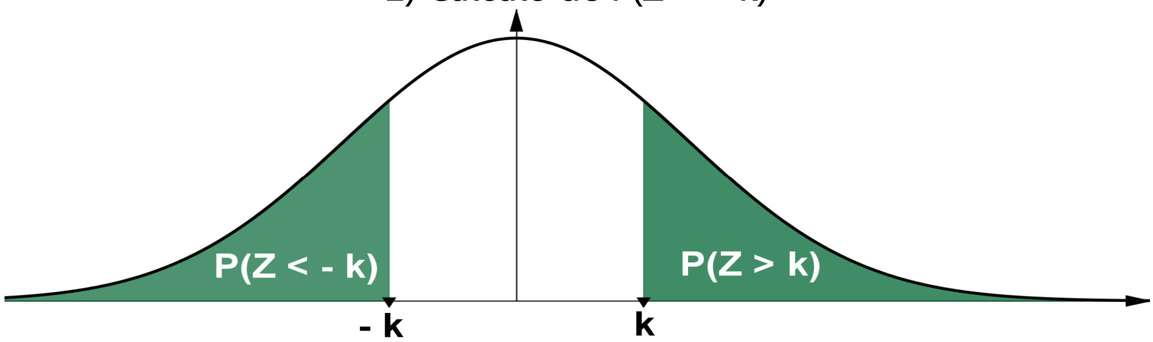
### 1) Cálculo de P(Z > k)




P(Z > k) = "Área a la dcha de k" = "Toda el área" – "Área a la izda de k" = 1 – P(Z < k)

*Ejemplo*: p(Z > 1,32) = 1 – p(Z < 1,32) = 1 – 0,9066 = 0,0934

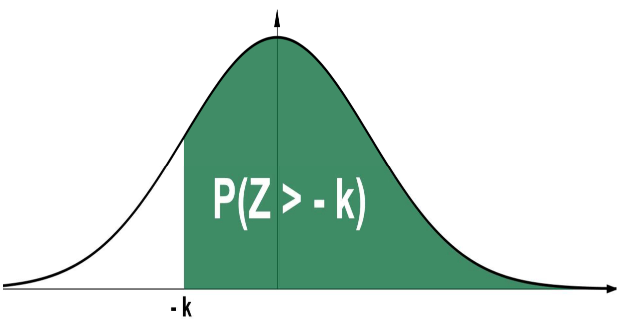
### 2) Cálculo de P(Z < – k)

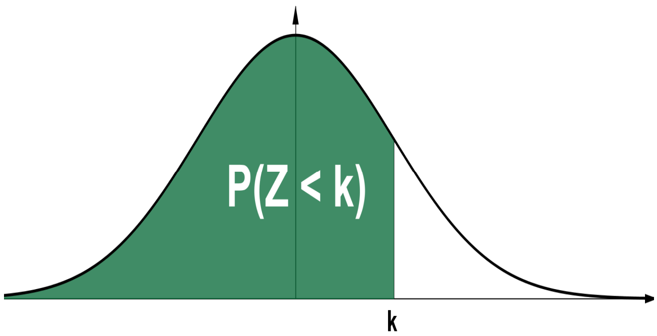



P(Z < – k) = " Área a la izda de – k" = "Área a la dcha de k" = P(Z > k) = 1 – P(Z < k)

*Ejemplo*: p(Z < – 0,84) = 1 – p(Z < 0,84) = 1 – 0,7995 = 0,2005

### 3) Cálculo de P(Z > – k)

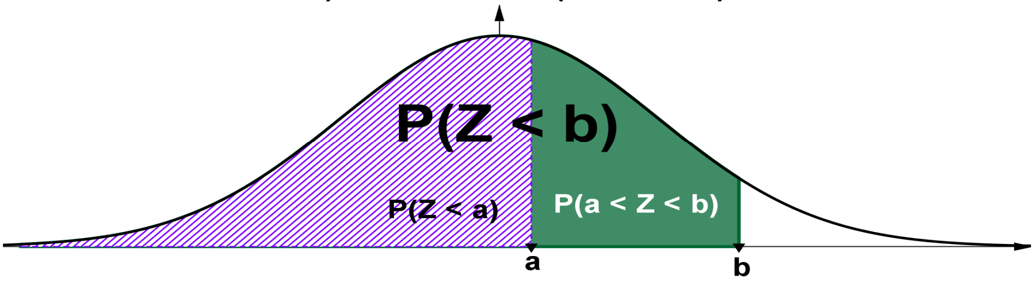



P(Z > – k) = " Área a la derecha de – k" = "Área a la izquierda de k" = P(Z < k)

*Ejemplo*: p(Z > – 1,48) = p (Z < 1,48) = 0,9306

4) Cálculo de P(a < Z < b)

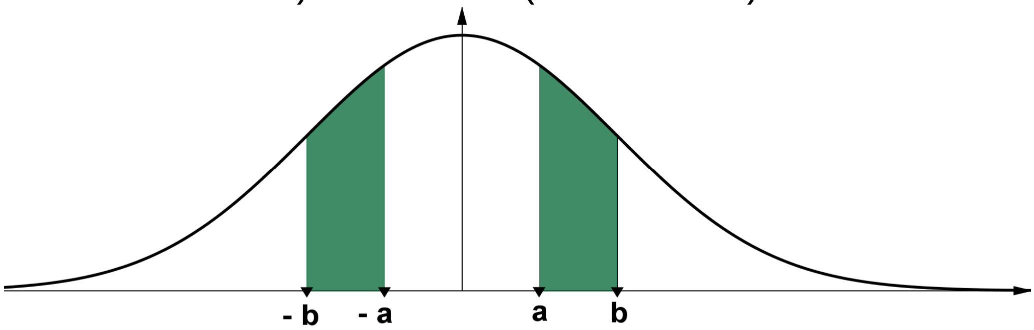



P(a < Z < b) = " Área entre a y b" = "Área a la izda de b" – "Área a la izda de a" =

= P(Z < b) – P(Z < a)

*Ejemplo*: p(2 < Z < 2,76) = p(Z < 2,76) – p(Z < 2) = 0,9971 – 0,9772 = 0,0199

5) Cálculo de P(– b < Z < – a)

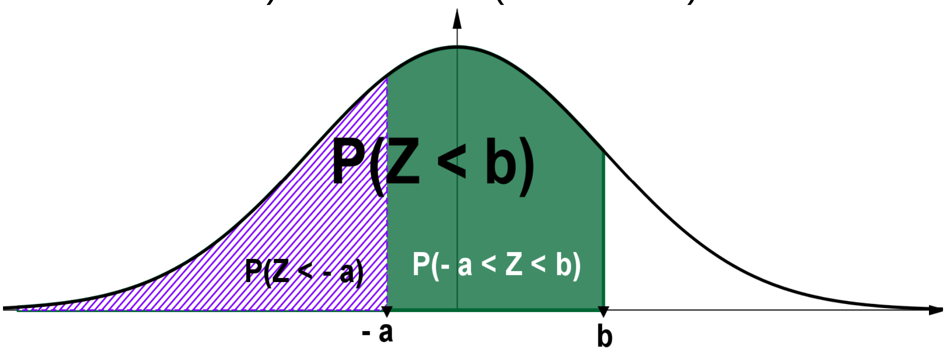



P(– b < Z < – a) = " Área entre – b y – a" = "Área entre a y b" =

= P(a < Z < b) = P(Z < b) – P(Z < a)

*Ejemplo*: p(– 1,5 < Z < – 0,99) = p(Z < 1,5) – p(Z < 0,99) = 0,9332 – 0,8389 = 0,0943

6) Cálculo de P(– a < Z < b)




P(– a < Z < b) ="Área entre – a y b"="Área a la izda de b" – "Área a la izquierda de – a"

= P(Z < b) – P(Z < – a) = p(Z < b) – [ 1 – p(Z < a) ] = p(Z < a) + p(Z < b) – 1

*Ejemplo*: p(– 1 < Z < 2) = p(Z < 1) + p(Z < 2) – 1 = 0,8413 + 0,9772 – 1 = 0,8185

**Ejercicio 38** Usando la tabla de la distribución N(0,1), calcula las siguientes probabilidades:

a) $p(Z < 1{,}89) = \phi(1{,}89) = 0{,}9706$

b) $p(Z > 1) = 1 - \phi(1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

c) $p(Z > -0{,}04) = \phi(0{,}04) = 0{,}5160$

d) $p(1{,}78 < Z < 3) = \phi(3) - \phi(1{,}78) = 0{,}9987 - 0{,}9625 = 0{,}0362$

e) $p(-2{,}25 < Z < -1{,}49) = \phi(2{,}25) - \phi(1{,}49) = 0{,}9878 - 0{,}9319 = 0{,}0559$

f) $p(-3{,}07 < Z < 2{,}77) = \phi(3{,}07) + \phi(2{,}77) - 1 = 0{,}9989 + 0{,}9972 - 1 = 0{,}9961$

g) $p(Z = 2{,}73) = 0$

h) $p(-0{,}39 < Z < 1{,}1) = \phi(0{,}39) + \phi(1{,}1) - 1 = 0{,}6517 + 0{,}8643 - 1 = 0{,}516$

i) $p(Z < -0{,}17) = 1 - \phi(0{,}17) = 1 - 0{,}5675 = 0{,}4325$

j) $p(-0{,}25 < Z < 1{,}79) = \phi(0{,}25) + \phi(1{,}79) - 1 = 0{,}5987 + 0{,}9633 - 1 = 0{,}562$

## Tipificación de una distribución normal N(μ, σ)

Se puede demostrar que si $X \longrightarrow N(\mu , \sigma)$, entonces la variable $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \longrightarrow N(0,1)$.

A este proceso se le llama tipificación de la variable.

La tipificación nos permite hallar probabilidades en una distribución $X \longrightarrow N(\mu , \sigma)$ transformándola en una variable $Z \longrightarrow N(0,1)$.

Por ejemplo, $p(a < X < b) = p(\dfrac{a-\mu}{\sigma} < \dfrac{X-\mu}{\sigma} < \dfrac{b-\mu}{\sigma}) = p(\dfrac{a-\mu}{\sigma} < Z < \dfrac{b-\mu}{\sigma})$

Esta probabilidad la podemos calcular usando las reglas vistas anteriormente.

*Ejemplo*:

Si $X \longrightarrow N(5,4)$ , entonces $p(1 < X < 7) = p(\dfrac{1-5}{4} < \dfrac{X-5}{4} < \dfrac{7-5}{4}) = p(-1 < Z < 0{,}5) =$

$= p(Z < 1) + p(Z < 0{,}5) - 1 = 0{,}8413 + 0{,}6915 - 1 = 0{,}5328$

**Ejercicio 39** En una distribución X que sigue una N(8 , 2), calcula: a) $P(X \leq 10)$ b) $P(X \geq 5)$ c) $P(X < 7)$ d) $p(X > 6{,}5)$ e) $P(4 \leq X < 9)$ f) $P(7 < X \leq 8)$

$$[\ Z = \frac{X-8}{2} \rightarrow N(0,1)\ ]$$

a) $p(\dfrac{X-8}{2} \leq \dfrac{10-8}{2}) = p(Z \leq 1) = \phi(1) = 0{,}8413$

b) $p(\dfrac{X-8}{2} \geq \dfrac{5-8}{2}) = p(Z \geq -1{,}5) = \phi(1{,}5) = 0{,}9332$

c) $p(\dfrac{X-8}{2} < \dfrac{7-8}{2}) = p(Z < -0{,}5) = 1 - \phi(0{,}5) = 0{,}3085$

d) $p(\dfrac{X-8}{2} > \dfrac{6{,}5-8}{2}) = p(Z > -0{,}75) = \phi(0{,}75) = 0{,}7734$

e) $p(\dfrac{4-8}{2} \leq \dfrac{X-8}{2} < \dfrac{9-8}{2}) = p(-2 \leq Z < 0{,}5) = \phi(2) + \phi(0{,}5) - 1 = 0{,}9772 + 0{,}6915 - 1 = 0{,}6687$

f) $p(\dfrac{7-8}{2} < \dfrac{X-8}{2} < \dfrac{8-8}{2}) = p(-0{,}5 \leq Z < 0) = \phi(0{,}5) - \phi(0) = 0{,}6915 - 0{,}5 = 0{,}1915$

Ejercicio 40 A lo largo de diferentes pruebas de selectividad, se ha encontrado que la distribución de las calificaciones sigue una ley normal de media 6,3 puntos y desviación típica 0,7.
Calcula la probabilidad de que la nota de un estudiante de selectividad elegido al azar esté comprendida entre 6 y 7 puntos.

$$X = \text{nota del alumno}, \quad X \to N(6{,}3;0{,}7) \qquad Z = \frac{X-6{,}3}{0{,}7} \to N(0,1)$$

$$\text{Nos piden } p(6 < X < 7) = p\left(\frac{6-6{,}3}{0{,}7} < \frac{X-6{,}3}{0{,}7} < \frac{7-6{,}3}{0{,}7}\right) = p(-0{,}43 < Z < 1) =$$

$$= p(Z < 0{,}43) + p(Z < 1) - 1 = 0{,}6664 + 0{,}8413 - 1 = 0{,}5077 \to \boxed{50{,}77\%}$$

Ejercicio 41 En un proceso fotográfico, el tiempo de revelado de las impresiones puede considerarse una variable aleatoria normal para la cual $\mu$ = 12,9 minutos, $\sigma$ = 2 minutos.

Determina la probabilidad de que el tiempo de revelado:

a) Tarde entre 16 y 16,5 min. b) Se lleve al menos 16,2 min. c) Se lleve a lo más 16,35 min.

$$[\, X = \text{tiempo de revelado};\ X \to N(12{,}9\ ;\ 2)\ ;\quad Z = \frac{X-12{,}9}{2} \to N(0,1)\,]$$

$$a)\ p(16 < X < 16{,}5) = p\left(\frac{16-12{,}9}{2} < \frac{X-12{,}9}{2} < \frac{16{,}5-12{,}9}{2}\right) = p(1{,}55 < Z < 1{,}8) = \phi(1{,}8) - \phi(1{,}55) = 0{,}9641 - 0{,}9394 = 0{,}0247$$

$$b)\ p(X \ge 16{,}2) = p\left(\frac{X-12{,}9}{2} \ge \frac{16{,}2-12{,}9}{2}\right) = p(Z \ge 1{,}65) = 1 - \phi(1{,}65) = 1 - 0{,}9505 = 0{,}0495$$

$$c)\ p(X \le 16{,}35) = p\left(\frac{X-12{,}9}{2} \le \frac{16{,}35-12{,}9}{2}\right) = p(Z \le 1{,}73) = \phi(1{,}73) = 0{,}9582$$

Ejercicio 42 En un estudio sobre niveles de emisión de sustancias contaminantes, la variable X representa la cantidad de óxido de nitrógeno emitida. Se sabe que, para los vehículos de cierto tipo, X tiene una distribución normal con media 1,6 y desviación típica 0,4.
a) Calcula la probabilidad de que la cantidad de óxido de nitrógeno emitida sea menor que 1,8.
b) Halla la probabilidad de que X esté entre 1,2 y 1,4.
c) Obtener un valor de contaminación c tal que la probabilidad de que un vehículo emita una cantidad menor que c sea igual a 0,9901.

$$[\, X \to N(1{,}6\ ;\ 0{,}4)\ ;\quad Z = \frac{X-1{,}6}{0{,}4} \to N(0,1)\,]$$

$$a)\ p(X < 1{,}8) = p\left(\frac{X-1{,}6}{0{,}4} < \frac{1{,}8-1{,}6}{0{,}4}\right) = p(Z < 0{,}5) = \phi(0{,}5) = 0{,}6915$$

$$b)\ p(1{,}2 < X < 1{,}4) = p\left(\frac{1{,}2-1{,}6}{0{,}4} < \frac{X-1{,}6}{0{,}4} < \frac{1{,}4-1{,}6}{0{,}4}\right) = p(-1 < Z < -0{,}5) = \phi(1) - \phi(0{,}5) = 0{,}8413 - 0{,}6915 = 0{,}1498$$

$$c)\ p(X < c) = 0{,}9901 \to p\left(\frac{X-1{,}6}{0{,}4} < \frac{c-1{,}6}{0{,}4}\right) = 0{,}9901 \to p\left(Z < \frac{c-1{,}6}{0{,}4}\right) = 0{,}9901 \to \frac{c-1{,}6}{0{,}4} = 2{,}33$$

$$\text{Luego, } c = 2{,}33 \cdot 0{,}4 + 1{,}6\ ;\quad c = 2{,}532$$

**Ejercicio 43** El peso de los toros de una determinada ganadería se distribuye normalmente con una media de 500 kg y desviación típica 45 kg. Si la ganadería tiene 2000 toros, calcula cuántos pesarán:

a) más de 540 kg b) menos de 480 kg c) entre 490 y 510 kg

$$[\, X = \textit{peso de los toros};\ X \to N(500\ ;\ 45)\ ;\ \ Z = \frac{X-500}{45} \to N(0,1)\,]$$

$$a)\ p(X > 540) = p(\frac{X-500}{45} > \frac{540-500}{45}) = p(Z > 0,89) = 1-\phi(0,89) = 1-0,8133 = 0,1867 = 18,67\%$$

*El número de toros que pesan más de 540 kg es* $18,67\%$ *de* $2000 = 373,4 \simeq 373$ *toros*

$$b)\ p(X < 480) = p(\frac{X-500}{45} < \frac{480-500}{45}) = p(Z < -0,45) = 1-\phi(0,45) = 1-0,6736 = 0,3264 = 32,64\%$$

*El número de toros que pesan menos de 480 kg es* $32,64\%$ *de* $2000 = 652,8 \simeq 653$ *toros*

$$c)\ p(490 < X < 510) = p(\frac{490-500}{45} < \frac{X-500}{45} < \frac{510-500}{45}) = p(-0,22 < Z < 0,22) = 2.\phi(0,22)-1 = 2\ .\ 0,5871-1 = 17,42\%$$

*El número de toros que pesan entre 490 kg y 510 kg es* $17,42\%$ *de* $2000 = 348,4 \simeq 348$ *toros*

## 7.- VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS.

### Distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta

Se llama distribución de probabilidad de una v.a. discreta X que toma valores $x_1, x_2, ..., x_n$ al conjunto de probabilidades: $p_1 = p(X = x_1)$, $p_2 = p(X = x_2)$, .... $p_n = p(X = x_n)$

Para calcular la distribución de probabilidad se puede hacer una *tabla de probabilidades* como la siguiente:

| $x_i$ | $p_i = p(X = x_i)$ |
|---|---|
| $x_1$ | $p_1$ |
| $x_2$ | $p_2$ |
| .... | .... |
| $x_n$ | $p_n$ |

A partir de la tabla se puede dibujar un diagrama de barras, llamado *gráfico de probabilidades*, representando en el eje horizontal los valores $x_i$ y en el eje vertical los valores $p_i$

### Parámetros de una variable aleatoria discreta

Los parámetros más utilizados en una v.a. discreta son:

*Media aritmética o esperanza matemática*: $\boxed{\mu = \sum x_i\, p_i}$ *Varianza*: $\boxed{\sigma^2 = \Sigma x_i^2 p_i - \mu^2}$

*Desviación típica*: $\boxed{\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\Sigma x_i^2 p_i - \mu^2}}$

Nota: La varianza también se puede calcular con la fórmula $\sigma^2 = \sum (x_i - \mu)^2\, p_i$

*Ejemplo*:

En el experimento aleatorio de lanzar un dado dos veces. Sea X = "nº de veces que sale el 6".
X es una variable aleatoria discreta, pues X sólo toma los valores $x_i$: 0 , 1 y 2
Los resultados del experimento los podemos obtener mediante esta tabla:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 2 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 3 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |
| 4 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 |
| 5 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 6 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 |

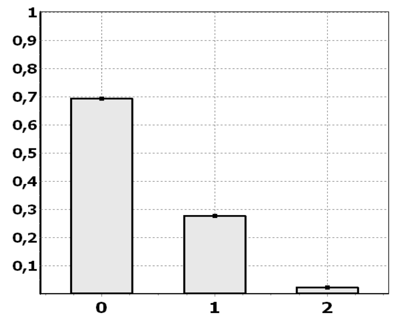
La distribución de probabilidad es:

| $x_i$ | $p_i = p(X = x_i)$ |
|---|---|
| 0 | $\frac{25}{36} = 0{,}6944 = 69{,}44\%$ |
| 1 | $\frac{10}{36} = 0{,}2778 = 27{,}78\%$ |
| 2 | $\frac{1}{36} = 0{,}0278 = 2{,}78\%$ |
| Total | $\sum p_i = 1 = 100\%$ |

Por ejemplo, si queremos calcular la probabilidad de que salga el 6 menos de 2 veces:

$P(X < 2) = 1 - p(X = 2) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36} \cong 0{,}9722 = 97{,}22\%$, que coincide con $p(X = 0) + p(X = 1)$

El gráfico de probabilidades sería:




En todas las distribuciones de probabilidad discreta, se cumple: $\sum p_i = 1$

Vamos a calcular los parámetros de la distribución:

| $x_i$ | $p_i$ | $x_i\ p_i$ | $x_i^2\ p_i$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{25}{36}$ | 0 | 0 |
| 1 | $\frac{10}{36}$ | $\frac{10}{36}$ | $\frac{10}{36}$ |
| 2 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{4}{36}$ |
| Total | 1 | $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ | $\frac{14}{36} = \frac{7}{18}$ |

Media o esperanza matemática de X: $\mu = \sum x_i\ p_i = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \cong 0{,}3333$

Varianza de X: $\sigma^2 = \sum x_i^2 p_i - \mu^2 = \frac{7}{18} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{18} \cong 0{,}2778 = \frac{7}{18} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{18} - \frac{1}{9} = \frac{5}{18} = 0{,}278$

Desviación típica de X: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{5}{18}} \cong 0{,}527$

Ejercicio 44 Sea X una variable aleatoria que expresa el número de personas que habitan en una vivienda elegida al azar. La distribución de probabilidad de X es la siguiente:

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,23 | 0,322 | 0,177 | 0,155 | 0,067 | 0,024 | 0,016 |

a) Comprobar que es una distribución de probabilidad. $Si,\ pues\ \sum p_i = 1$

b) Hallar la probabilidad de que el nº de personas que viven en un hogar sea menor o igual que cuatro.
$0,23+0,322+0,177+0,155=0,884$

c) Calcular la probabilidad de que al menos dos personas vivan en una vivienda. $1-0,23=0,77$

d) Obtener el número medio de personas que habitan en una vivienda. $\mu=\sum x_i p_i = 2,616$

## 8.- DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Si realizamos n veces el mismo experimento y le llamamos X = número de veces que ocurre un suceso A", entonces X puede tomar los valores: 0, 1, 2, 3,…., n. Llamamos p = p(A).

X es una v.a. discreta con n + 1 valores.

Decimos que la variable aleatoria X tiene *distribución de probabilidad binomial* B(n , p).

Se representa así: X ⟶ B(n , p)

*Ejemplos de distribuciones binomiales*:

1) Si tiramos un dado 15 veces y X = número de veces que sale el 5. Entonces X ⟶ B(15 , $\frac{1}{6}$)

2) Supongamos que en un parto la probabilidad de nacer una niña es del 65%.
Si observamos 30 nacimientos y X = número de niñas. Entonces X ⟶ B(30 ; 0,65)

3) La probabilidad de que al lanzar a canasta un jugador de baloncesto es del 70%.
Si lanza a canasta 50 veces y X = número de aciertos. Entonces X ⟶ B(50; 0,7)

4) Lanzamos una moneda 25 veces; X = número de cruces. Entonces, X ⟶ B(25 ; 0,5)

### Factorial de un número n

Es el producto de n por todos los números naturales menores que él.

El factorial de n se representa por n! y se lee "n factorial".

$$\boxed{n\,! = n.(n-1).(n-2).\ \ldots\ .3\,.\,2\,.\,1}$$

*Ejemplos*: 1 ! = 1    2 ! = 2 . 1 = 2    3 ! = 3 . 2 . 1 = 6    4 ! = 4 . 3 . 2 . 1 = 24    etc

0 ! = 1 (por convenio)

El factorial de un número también se puede hallar con la calculadora científica usando la función x!

Por ejemplo, si queremos calcular 13! , el proceso es el siguiente: 13 x! =
Nos da como resultado: 6 227 020 800.

Este resultado coincidiría con la multiplicación: 13.12.11.10.9.8.7.6.5.4.3.2.1

### Número combinatorio

Dados dos números naturales n y m con n ≥ m se define el número combinatorio n sobre m así:

$$\boxed{\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,.\,(n-m)!}}$$

El número combinatorio $\binom{n}{m}$ se puede hallar con la calculadora científica usando la función nCr

Por ejemplo, si queremos calcular $\binom{5}{2}$ , el proceso es el siguiente: 5 nCr 2 = Nos da como resultado: 10.

## Probabilidad en una B(n , p)

$$\boxed{p_k = p(X = k) = \binom{n}{k} p^k.(1-p)^{n-k} \ , \ k = 0, 1, 2, \dots, n}$$

Por ejemplo, Si $X \longrightarrow B(5 ; 0{,}2)$ , $p_3 = p(X = 3) = \binom{5}{3} . 0{,}2^3 . 0{,}8^2 = 10 . 0{,}008 . 0{,}64 = 0{,}0512$

## Parámetros de una distribución binomial B(n , p)

Sea X una variable discreta que sigue una distribución binomial, $X \longrightarrow B(n , p)$
Entonces:

*Media aritmética o esperanza matemática de X*: $\boxed{\mu = np}$ *Varianza de X*: $\boxed{\sigma^2 = np(1-p)}$

*Desviación típica de X*: $\boxed{\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{np(1-p)}}$

**Ejercicio 45** En una distribución binomial B(5; 0,65) calcula:

a) $p(x = 3)$ b) $p(x = 0)$ c) $p(x \geq 0)$ d) $p(x \leq 4)$ e) $p(x \geq 2)$ f) $p(x \neq 1)$ g) $p(x < 0)$

$$p(X = k) = \binom{5}{k} 0{,}65^k.(1-0{,}65)^{5-k} = \binom{5}{k} 0{,}65^k.0{,}35^{5-k}$$

$a)\ p(X = 3) = \binom{5}{3} 0{,}65^3.0{,}35^2 = 10\ .0{,}65^3.0{,}35^2 = 0{,}3364$

$b)\ p(X = 0) = \binom{5}{0} 0{,}65^0.0{,}35^5 = 1\ .\ 1\ .\ 0{,}35^5 = 0{,}005252$ $c)\ p(X \geq 0) = 1,\ \text{pues es el suceso seguro}$

$d)\ p(X \leq 4) = 1 - p(X > 4) = 1 - p(X = 5) = 1 - [\binom{5}{5} 0{,}65^5.0{,}35^0] = 1 - 1\ .\ 0{,}65^5\ .\ 1 = 0{,}8840$

$e)\ p(X \geq 2) = 1 - p(X < 2) = 1 - [p(X = 0) + p(X = 1)] = 1 - [0{,}005252 + \binom{5}{1} 0{,}65^1.0{,}35^4] = 1 - [0{,}005252 + 5\ .\ 0{,}65.0{,}35^4] = 0{,}9460$

$f)\ p(X \neq 1) = 1 - p(X = 1) = 1 - \binom{5}{1} 0{,}65^1.0{,}35^4 = 1 - 5\ .\ 0{,}65\ .\ 0{,}35^4 = 0{,}9512$

$g)\ p(X < 0) = 0,\ \text{pues es el suceso imposible}$

**Ejercicio 46** Una encuesta revela que el 20% de la población es favorable a un político y el resto es desfavorable. Se eligen 6 personas al azar. Usando la distribución binomial, calcula la probabilidad de que exactamente sean 2 las personas favorables

X = nº de personas favorables al político, A = "la persona es favorable al político"

$n = 6$ , $p = p(A) = 0{,}2$; $X \rightarrow B(6 ; 0{,}2)$

$\text{Nos piden } p(X = 2) = \binom{6}{2} 0{,}2^2.(1-0{,}2)^4 = 15\ .0{,}2^2.0{,}8^4 = 0{,}2458 \rightarrow \boxed{24{,}58\%}$

**Ejercicio 47** Una empresa vendedora de automóviles recibe el pago al contado del 20% de sus ventas. En un determinado día ha vendido 5 automóviles. Halla la probabilidad de que:

a) Al menos 2 automóviles se hayan vendido al contado

b) Haya un máximo de 2 automóviles que se hayan vendido a plazos

$X = n^o \text{ de ventas al contado}\ ;\ X \rightarrow B(5 ; 0{,}2)$ $p(X = k) = \binom{5}{k} 0{,}2^k.0{,}8^{5-k}$

$a)\ p(X \geq 2) = 1 - p(X < 2) = 1 - [p(X = 0) + p(X = 1)] = 1 - [\binom{5}{0} 0{,}2^0.0{,}8^5 + \binom{5}{1} 0{,}2^1.0{,}8^4] = 1 - [\ 1.1.0{,}8^5 + 5\ .\ 0{,}2.0{,}8^4] = 0{,}26272$

$b)\ p(X > 2) = p(X \geq 2) - p(X = 2) = 0{,}26272 - \binom{5}{2} 0{,}2^2.0{,}8^3 = 0{,}26272 - 10\ .\ 0{,}2^2.0{,}8^3 = 0{,}05792$

Ejercicio 48 Un jugador de tenis tiene una probabilidad de ganar una partida de 0,25. Si juega 8 partidos, calcula la probabilidad de que gane: a) sólo uno b) al menos uno c) más de la mitad.

$X = n^o \text{ de partidos ganados} \;;\; X \to B(8\,;\,0{,}25) \quad p(X=k)=\binom{8}{k}0{,}25^k.0{,}75^{8-k}$

$a)\; p(X=1)=\binom{8}{1}0{,}25^1.0{,}75^7 = 8\,.\,0{,}25\,.\,0{,}75^7 = 0{,}2670$

$b)\; p(X\ge 1)=1-p(X<1)=1-p(X=0)=1-\binom{8}{0}0{,}25^0.0{,}75^8 = 1-1\,.\,1\,.\,0{,}75^8 = 0{,}8999$

$c)\; p(X>4)=p(X=5)+p(X=6)+p(X=7)+p(X=8)=$

$=\binom{8}{5}0{,}25^5.0{,}75^3+\binom{8}{6}0{,}25^6.0{,}75^2+\binom{8}{7}0{,}25^7.0{,}75^1+\binom{8}{8}0{,}25^8.0{,}75^0=$

$=56\,.\,0{,}25^5.0{,}75^3+28\,.\,0{,}25^6.0{,}75^2+8\,.\,0{,}25^7.0{,}75+1\,.\,0{,}25^8.\,1=$

$=0{,}02307+0{,}003845+0{,}0003662+0{,}00001526=0{,}02730$

Ejercicio 49 La probabilidad de que salga cara con una moneda trucada es 0,45. Se lanza la moneda 7 veces. Calcula la probabilidad de que salgan: a) 3 caras b) al menos 2 caras c) a lo sumo 3 caras

$X = n^o \text{ de caras} \;;\; X \to B(7\,;\,0{,}45) \quad p(X=k)=\binom{7}{k}0{,}45^k.0{,}55^{7-k}$

$a)\; p(X=3)=\binom{7}{3}0{,}45^3.0{,}55^4 = 35\,.\,0{,}45^3.0{,}55^4 = 0{,}2918$

$b)\; p(X\ge 2)=1-p(X<2)=1-[p(X=0)+p(X=1)]=1-[\binom{7}{0}0{,}45^0.0{,}55^7+\binom{7}{1}0{,}45^1.0{,}55^6]=1-[1\,.1\,.\,0{,}55^7+7\,.\,0{,}45\,.\,0{,}55^6]=0{,}8976$

$c)\; p(X\le 3)=p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)+p(X=3)=$

$=1\,.1\,.\,0{,}55^7+7\,.\,0{,}45\,.\,0{,}55^6+\binom{7}{2}0{,}45^2.0{,}55^5+0{,}2918=$

$=0{,}55^7+7\,.\,0{,}45\,.\,0{,}55^6+21\,.\,0{,}45^2.0{,}55^5+0{,}2918=0{,}6082$

## Teorema de De Moivre de la binomial

Sea una v.a. X que sigue una distribución binomial B(n, p) siendo np ≥ 5 y n(1 – p) ≥ 5.

Entonces, la distribución binomial se puede sustituir por otra v.a. X´ que sigue una distribución normal

$$X' \to N\left(np\,,\sqrt{np\;(1-p)}\right)$$

De esta forma, podemos calcular probabilidades de una B(n, p) de forma más sencilla y rápida.

Se cumple:

$p(X = a) = p(a - 0{,}5 < X' < a + 0{,}5)$

$p(X < a) = p(X' < a - 0{,}5)$ $\quad p(X \le a) = p(X' < a + 0{,}5)$

$p(X > a) = p(X' > a + 0{,}5)$ $\quad p(X \ge a) = p(X' > a - 0{,}5)$

$p(a < X < b) = p(a + 0{,}5 < X' < b - 0{,}5)$ $\quad p(a \le X \le b) = p(a - 0{,}5 < X' < b + 0{,}5)$

$p(a \le X < b) = p(a - 0{,}5 < X' < b - 0{,}5)$ $\quad p(a < X \le b) = p(a + 0{,}5 < X' < b + 0{,}5)$

Ejercicio 50 Un examen de tipo test consta de 100 preguntas, cada una de las cuales se acompaña de cuatro respuestas, una de ellas correcta y erróneas las otras tres. Un estudiante contesta al azar

a) ¿Cuál es la probabilidad de que acierte más de 30 preguntas? b) ¿Y menos de 15?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe?

$X = n^o\ de\ aciertos\ ;\ X \to B(100\ ;\ \frac{1}{4}) = B(100\ ;\ 0,25);\ n=100,\ p=0,25 \to np = 100\ .\ 0,25 = 25 \geq 5\ ,\ n(1-p) = 100\ .\ 0,75 = 75 \geq 5$

*Por tanto, se puede aplicar el teorema de De moivre. Sustituimos* $X$ *por otra v.a.* $X' \to N(np\ ,\ \sqrt{np(1-p)}\ ) = N(25\ ;\ 4,33)$

$$a)\ p(X > 30) = p(X' > 30,5) = p(\frac{X'-25}{4,33} > \frac{30,5-25}{4,33}) = p(Z > 1,27) = 1-\phi(1,27) = 1-0,8980 = 0,102$$

$$b)\ p(X < 15) = p(X' < 14,5) = p(\frac{X'-25}{4,33} < \frac{14,5-25}{4,33}) = p(Z < -2,42) = 1-\phi(2,42) = 1-0,9922 = 0,0078$$

$$c)\ p(X \geq 50) = p(X' > 49,5) = p(\frac{X'-25}{4,33} > \frac{49,5-25}{4,33}) = p(Z > 5,66) = 1-\phi(5,66) = 1-1 = 0$$

Ejercicio 51 El 2% de los tornillos fabricados por una máquina presentan defectos. Si tenemos un lote de 300 tornillos, ¿cuál es la probabilidad de que haya más de 10 defectuosos?

$X = n^o\ de\ tornillos\ defectuosos\ ;\ X \to B(300\ ;\ 0,02)\ ;\ n=300,\ p=0,02 \to np = 300\ .\ 0,02 = 6 \geq 5\ ,\ n(1-p) = 300\ .\ 0,98 = 294 \geq 5$

*Por tanto, se puede aplicar el teorema de De moivre. Sustituimos* $X$ *por otra v.a.* $X' \to N(np\ ,\ \sqrt{np(1-p)}\ ) = N(6\ ;\ 2,42)$

$$p(X > 10) = p(X' > 10,5) = p(\frac{X'-6}{2,42} > \frac{10,5-6}{2,42}) = p(Z > 1,86) = 1-\phi(1,86) = 1-0,9686 = 0,0314$$

Ejercicio 52 En una ciudad una de cada tres familias posee teléfono. Si se eligen al azar 90 familias, calcula la probabilidad de que entre ellas haya por lo menos 30 tengan teléfono.

$X = n^o\ de\ familias\ con\ teléfono\ ;\ X \to B(90\ ;\ \frac{1}{3}) = B(90\ ;0,33)\ ;\ n=90,\ p=0,33 \to np = 90\ .\ 0,33 = 29,7 \geq 5\ ,\ n(1-p) = 90\ .\ 0,67 = 60,3 \geq 5$

*Por tanto, se puede aplicar el teorema de De moivre. Sustituimos* $X$ *por otra v.a.* $X' \to N(np\ ,\ \sqrt{np(1-p)}\ ) = N(29,7\ ;\ 4,46)$

$$p(X \geq 30) = p(X' > 29,5) = p(\frac{X'-29,7}{4,46} > \frac{29,5-29,7}{4,46}) = p(Z > -0,04) = \phi(0,04) = 0,5160$$

Ejercicio 53 El 5% de los libros prestados en una biblioteca de un centro escolar son técnicos. Si se toman los últimos 500 préstamos, calcula la probabilidad de que se hayan prestado entre 25 y 30 libros técnicos.

$X = n^o\ de\ libros\ técnicos\ ;\ X \to B(500\ ;\ 0,05)\ ;\ n=500,\ p=0,05 \to np = 500\ .\ 0,05 = 25 \geq 5\ ,\ n(1-p) = 500\ .\ 0,95 = 475 \geq 5$

*Por tanto, se puede aplicar el teorema de De moivre. Sustituimos* $X$ *por otra v.a.* $X' \to N(np\ ,\ \sqrt{np(1-p)}\ ) = N(25\ ;\ 4,87)$

$$p(25 < X < 30) = p(25,5 < X' < 29,5) = p(\frac{25,5-25}{4,87} < \frac{X'-25}{4,87} < \frac{29,5-25}{4,87}) = p(0,1 < Z < 0,92) = \phi(0,92) - \phi(0,1) = 0,8212 - 0,5398 = 0,2814$$

Ejercicio 54 El 15% de los habitantes de una determinada ciudad son diabéticos. Se toma una muestra de 600 habitantes. Usando el teorema de De Moivre, calcula la probabilidad de que en esa muestra haya menos de 100 personas diabéticas

$X = n^o\ de\ diabéticos\ ;\ X \to B(600\ ;\ 0,15)\ ;\ n=600,\ p=0,15 \to np = 600\ .\ 0,15 = 90 \geq 5\ ,\ n(1-p) = 600\ .\ 0,85 = 510 \geq 5$

*Por tanto, se puede aplicar el teorema de De moivre. Sustituimos* $X$ *por otra v.a.* $X' \to N(np\ ,\ \sqrt{np(1-p)}\ ) = N(90\ ;\ 8,75)$

$$Z = \frac{X'-\mu}{\sigma} = \frac{X'-90}{8,75} \to N(0,1)$$

$$Nos\ piden\ p(X < 100) = p(X' < 99,5) = p(\frac{X'-90}{8,75} < \frac{99,5-90}{8,75}) = p(Z < 1,09) = 0,8621 \to \boxed{86,21\%}$$