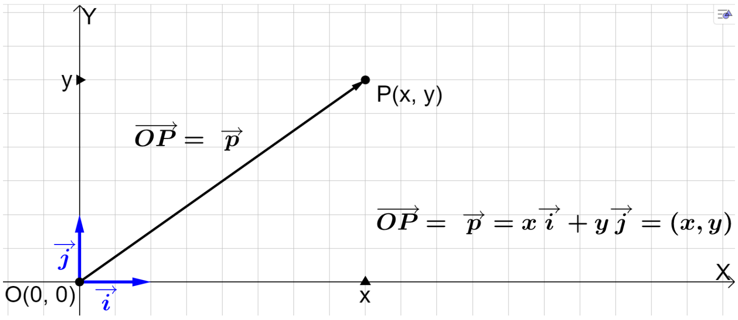
1.- REPASO: PUNTOS Y VECTORES

Vector de posición de un punto

Se llama vector de posición de un punto P(x, y) al vector $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$, siendo O(0, 0) el origen de coordenadas.

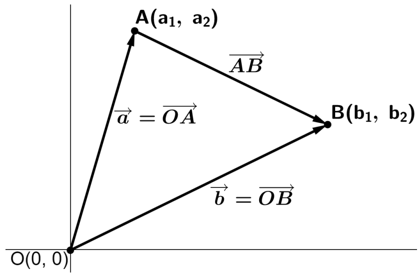


Como puedes observar las componentes del vector de posición de P coinciden con las coordenadas del punto P.

Por ejemplo, el vector de posición del punto A(1, –5) es $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = (1, -5)$

Vector determinado por dos puntos

Sean dos puntos del plano A(a_1, a_2) y B(b_1, b_2) y sea O(0, 0) el origen de coordenadas



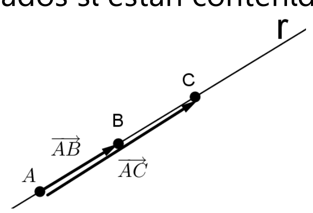
Fíjate en la figura: $\vec{a} + \overrightarrow{AB} = \vec{b} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (b_1,\ b_2) - (a_1,\ a_2) \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2)}$

Luego, para hallar las componentes de $\overrightarrow{AB}$ restamos las coordenadas de B menos las de A

Ejemplo: Si A(5, –1) y B(–2, 4) entonces $\overrightarrow{AB} = (-2-5,\ 4-(-1)) = (-7,\ 5)$

Puntos alineados

Tres o más puntos del plano están alineados si están contenidos en la misma recta.



$$\boxed{\text{A, B y C están alineados} \leftrightarrow \overrightarrow{AB} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{AC}}$$

Ejemplo:

Averigua si los puntos A, B y C están alineados:

a) A(2, –1), B(6, 1), C(8, 2).

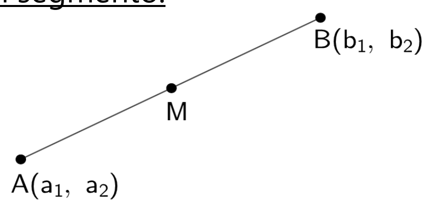
Resolución: A, B y C están alineados $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (6, 3) \mathbin{/\!/} (4, 2)$. Como $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, están alineados

b) A(–3, –3), B(6, 5), C(8, 7)

Resolución: A, B y C están alineados $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (11, 10) \mathbin{/\!/} (9, 8)$. Como $\frac{11}{9} \neq \frac{10}{8}$, no están alineados

Punto medio de un segmento.

Sea AB un segmento del plano y M su punto medio.



$$\text{Como } \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM} \Rightarrow \vec{b} - \vec{a} = 2(\vec{m} - \vec{a}) = 2\vec{m} - 2\vec{a} \Rightarrow \vec{b} - \vec{a} + 2\vec{a} = 2\vec{m}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = 2\vec{m} \Rightarrow \vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}[(a_1, a_2) + (b_1, b_2)] \Rightarrow \vec{m} = \left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right)$$

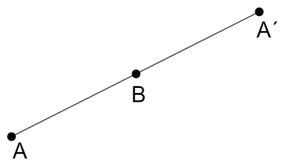
$$\text{Luego, } \boxed{M\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right)}$$

Por tanto, las coordenadas del punto medio M son la media aritmética de las coordenadas de A y B

Ejemplo: Si A(5, –1) y B(–2, 3) entonces el punto medio es $M\left(\frac{5+(-2)}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}, 1\right)$

Simétrico de un punto respecto de otro

El punto simétrico de un punto A respecto de un punto B es el punto A´ que cumple $\overrightarrow{AA'} = 2\,\overrightarrow{AB}$.
Es decir, B es el punto medio del segmento AA´.
Como $\overrightarrow{AA'} = 2\,\overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{a'} - \vec{a} = 2(\vec{b} - \vec{a}) \Rightarrow \vec{a'} = 2\vec{b} - 2\vec{a} + \vec{a} \Rightarrow \vec{a'} = 2\vec{b} - \vec{a}$



Ejemplo: Si A(5, –1) y B(–2, 3) entonces el punto simétrico de A respecto de B sería A´(x, y)

$$\text{Como } \overrightarrow{AA'} = 2\,\overrightarrow{AB} \Rightarrow (x-5,\ y+1) = 2(-7,\ 4) \Rightarrow \begin{cases} x-5=-14 \to x=-9 \\ y+1=8 \to y=7 \end{cases} \Rightarrow A'(-9,\ 7)$$

Usando la fórmula: $\vec{a'} = 2\vec{b} - \vec{a} = 2(-2, 3) - (5, -1) = (-9, 7)$. Luego, A´(–9, 7)

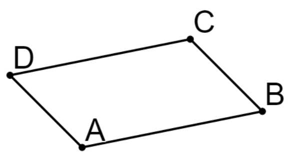
Ejercicios resueltos

1) Averiguar el valor de m para que estén alineados los puntos P(1, 4), Q(5, –2) y R(6, m)

$$\text{P, Q y R están alineados} \Leftrightarrow \overrightarrow{PR} = \lambda\overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow (5,\ m-4) = \lambda(4,\ -6) \Leftrightarrow \begin{matrix} 5 = 4\lambda \to \lambda = \dfrac{5}{4} \\ m-4 = -6\lambda \to \lambda = \dfrac{m-4}{-6} \end{matrix}.$$

Luego, para que estén alineados $\frac{5}{4} = \frac{m-4}{-6} \to -30 = 4m - 16 \to -14 = 4m \to m = \frac{-14}{4} = \frac{-7}{2}$

2) Los puntos A(1, 0), B(6, 1) y C(4, 3) son tres vértices consecutivos de un paralelogramo.
Determina las coordenadas del cuarto vértice



Como $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \vec{c} - \vec{d} \Rightarrow \vec{d} = \vec{c} - \overrightarrow{AB} = (4, 3) - (5, 1) = (-1, 2)$. Luego, D(–1, 2)

ACTIVIDADES

1.- Si $\overrightarrow{AB} = (-5, -2)$ y B(3, 6), ¿cuáles son las coordenadas de A? *Solución:* A(8, 8)

2.- ¿Qué coordenadas debe tener el punto P para que $3\overrightarrow{PQ} - 2\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{0}$, siendo Q(3, 2) y R(–1, 5)? *Solución:* P(11, –4)

3.- Halla el simétrico del punto A(2, 3) respecto de P(5, 4). *Solución:* A´(8, 5)

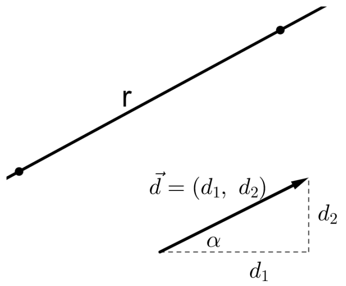
4.- Averigua si los puntos A(–4, –2), B(–1, –1) y C(5, 1) están alineados. *Solución:* Sí, están alineados

5.- Averigua el valor de x para que P(2, –3), Q(2x – 1, x + 2), R(–6, –1) y S(–5, –7) sean los vértices consecutivos de un paralelogramo. *Solución:* x = 1

2.- REPASO: ECUACIONES DE LA RECTA

Pendiente de una recta

Sea r una recta del plano y un vector $\overrightarrow{d} = (d_1, d_2)$ en la misma dirección que la recta (llamado vector director de la recta).

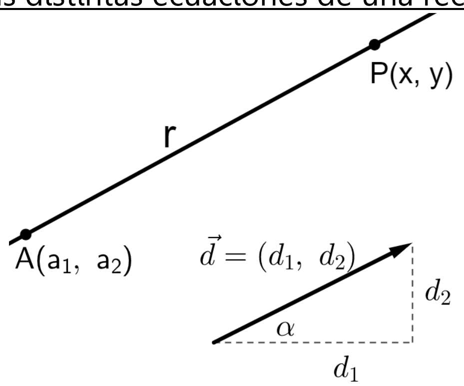


Se define la pendiente de la recta así: $\boxed{\textbf{pendiente} \text{ de } r = m = tg\,\alpha = \dfrac{d_2}{d_1}}$

Si d_1 fuese cero se dice que la pendiente es infinito o simplemente que no existe la pendiente. Esto sólo ocurre cuando la recta es vertical.

Por ejemplo, si el vector director es $\overrightarrow{d} = (-3, 5)$, la pendiente sería $m = \dfrac{5}{-3} = \dfrac{-5}{3}$ pero si el vector director es $\overrightarrow{d} = (0, 3)$, como $\dfrac{3}{0}$ no existe → no existe la pendiente → la recta sería vertical.

Las distintas ecuaciones de una recta



Como $\overrightarrow{AP} \,//\, \overrightarrow{d} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = \lambda\,\overrightarrow{d} \;\; (\lambda \in R) \Rightarrow \overrightarrow{p} - \overrightarrow{a} = \lambda\,\overrightarrow{d} \Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{c}\text{Ecuación vectorial}\\ r : \overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + \lambda\,\overrightarrow{d}\end{array}}$

A partir de la ecuación vectorial, sustituyendo, obtenemos: $r : (x, y) = (a_1, a_2) + \lambda(d_1, d_2)$

Operando e igualando las componentes: $\boxed{\begin{array}{c}\text{Ecuaciones paramétricas}\\ r:\begin{cases} x = a_1 + d_1\lambda \\ y = a_2 + d_2\lambda \end{cases}\end{array}}$

Despejando λ en las ecuaciones paramétricas e igualando: $\begin{array}{l} \dfrac{x-a_1}{d_1} = \lambda \\ \dfrac{y-a_2}{d_2} = \lambda \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Ecuación continua}\\ r: \dfrac{x-a_1}{d_1} = \dfrac{y-a_2}{d_2}\end{array}}$

Si fuese $d_1 = 0$ ó $d_2 = 0$ la ecuación anterior no debemos entenderla como una división sino como un simbolismo. Por ejemplo, la ecuación $\dfrac{x+2}{0} = \dfrac{7-y}{5}$ que equivale a $\dfrac{x+2}{0} = \dfrac{y-7}{-5}$ representa a la recta que pasa por (–2, 7) y tiene vector director (0, –5)

Si $d_1 \neq 0$ entonces $\dfrac{y-a_2}{x-a_1} = \dfrac{d_2}{d_1} = m \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Ecuación}\\ \text{punto - pendiente}\\ r: y - a_2 = m(x - a_1)\end{array}}$.

Un vector director de la recta es $\overrightarrow{d} = (d_1, d_2) \parallel (\dfrac{d_1}{d_1}, \dfrac{d_2}{d_1}) \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{d} = (1, m)}$

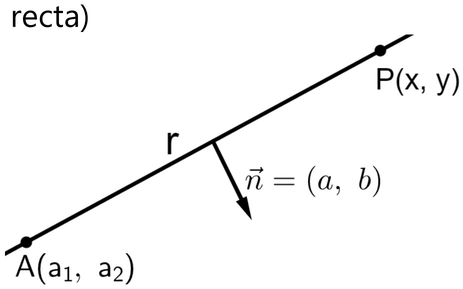
Si $d_1 = 0$ entonces no se puede obtener la ecuación punto-pendiente. En este caso, r es una recta vertical.

Operando en la ecuación continua resulta

$d_2(x-a_1) = d_1(y-a_2) \Rightarrow \overbrace{d_2}^{a}x \overbrace{-d_1}^{b}y \overbrace{-d_2a_1 + d_1a_2}^{c} = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Ecuación implícita}\\ \text{o general}\\ r: ax + by + c = 0\end{array}}$

Un vector director de la recta es $\boxed{\overrightarrow{d} = (d_1, d_2) = (-b, a)}$. En este caso la pendiente es $m = \dfrac{d_2}{d_1} \Rightarrow \boxed{m = \dfrac{-a}{b}}$

Como $\overrightarrow{d} = (-b, a)$ es un vector director de la recta entonces $\overrightarrow{n} = (a, b)$ es un vector ortogonal a la recta (se llama vector normal de la recta)



En este caso, $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AP} \Rightarrow \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \Rightarrow (a, b) \cdot (x - a_1,\ y - a_2) = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Ecuación normal}\\ a(x-a_1) + b(y-a_2) = 0\end{array}}$

Operando en la ecuación normal se obtiene la ecuación general ax + by + c = 0. Luego, a partir de la ecuación general podemos obtener un vector normal de la recta, que es $\overrightarrow{n} = (a, b)$

Si despejamos "y" en la ecuación punto-pendiente o en la ecuación implícita obtenemos:

$$y - a_2 = m(x - a_1) \rightarrow y = mx \overbrace{- ma_1 + a_2}^{n}$$

$$ax + by + c = 0 \xrightarrow{\text{si } b \neq 0} y = \underbrace{\frac{-a}{b}}_{m} x + \underbrace{\frac{-c}{b}}_{n} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\textbf{Ecuación}\\ \textbf{explícita}\\ r: y = mx + n\end{array}}$$

. El término independiente, n, se llama ordenada en el origen. Un vector director de la recta es $\boxed{\vec{d} = (1, m)}$

Si $d_1 = 0$ (lo que es lo mismo, b = 0) entonces no se puede obtener la ecuación explícita. En este caso, r es una recta vertical.

Ejemplo:

Calcula las ecuaciones de la recta que pasa por el punto A(2, – 5) y es paralela al vector $\vec{d} = (-3, 7)$.

Ecuación vectorial $r: \vec{p} = \vec{a} + \lambda \vec{d}$ pendiente $= m = \frac{7}{-3} = \frac{-7}{3} \Rightarrow$ **Ecuaciones paramétricas** $r: \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = -5 + 7\lambda \end{cases} \Rightarrow$ **Ecuación continua** $r: \frac{x-2}{-3} = \frac{y+5}{7}$

Ecuación punto-pendiente $r: y + 5 = \frac{-7}{3}(x - 2) \Rightarrow 3y + 15 = -7x + 14 \rightarrow$ **Ecuación implícita o general** $r: 7x + 3y + 1 = 0$

Como $\vec{n} = (7, 3)$ es $\perp$ a r, **Ecuación normal** $r: 7(x-2) + 3(y+5) = 0$. Como $7x + 3y + 1 = 0 \Rightarrow$ **Ecuación explícita** $r: y = \frac{-7}{3}x - \frac{1}{3}$

<u>Rectas especiales</u>

<u>El eje X</u> pasa por el origen de coordenadas 0(0,0) y tiene como vector director $\vec{d} = (1,0)$

Luego, las ecuaciones del eje X son: $\boxed{(x,y) = (0,0) + \lambda(1,0)} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \end{cases}} \Rightarrow \boxed{\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{0}} \Rightarrow \boxed{y = 0}$

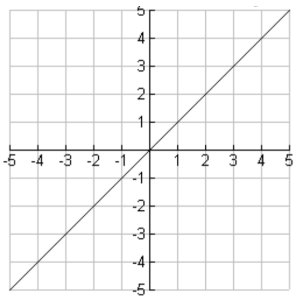
La ecuación de la <u>recta paralela al eje X u horizontal</u> que pasa por el punto (a, b) es $\boxed{y = b}$

<u>El eje Y</u> pasa por el origen de coordenadas 0(0,0) y tiene como vector director $\vec{d} = (0,1)$

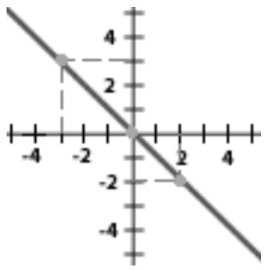
Por tanto, las ecuaciones del eje Y son: $\boxed{(x,y) = (0,0) + \lambda(0,1)} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \end{cases}} \Rightarrow \boxed{\frac{x-0}{0} = \frac{y-0}{1}} \Rightarrow \boxed{x = 0}$

La ecuación de la <u>recta paralela al eje Y ó vertical</u> que pasa por el punto (a, b) es $\boxed{x = a}$

<u>Bisectriz del I y III cuadrante</u>: Es la recta que pasa por (0, 0) y forma un ángulo de 45º con OX y, por tanto, su pendiente es m = tg 45º = 1. Su ecuación sería entonces: $y - 0 = 1(x - 0) \rightarrow \boxed{y = x}$



<u>Bisectriz del II y IV cuadrantes</u>: Es la recta que pasa por (0, 0) y forma un ángulo de 135º con OX y, por tanto, su pendiente es m = tg 135º = –1. Su ecuación sería entonces: $y - 0 = -1(x - 0) \rightarrow \boxed{y = -x}$



<u>Algunas consideraciones importantes</u>

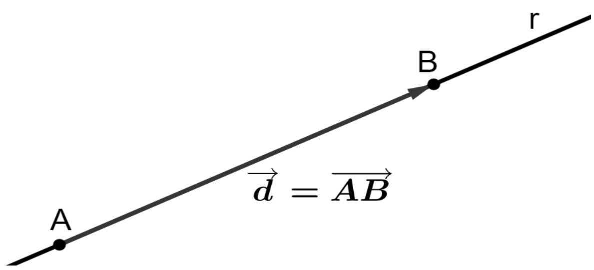
1) Si $\overrightarrow{d}$ es un vector director de r, cualquier vector proporcional a $\overrightarrow{d}$ también lo es.

<u>Ejemplo</u>:

Si queremos calcular las ecuaciones de la recta de vector director $(\frac{-3}{8}, \frac{1}{6})$, como $(\frac{-3}{8}, \frac{1}{6}) \overset{\cdot 24}{\approx} (-9, 4)$, podemos tomar como vector director $\overrightarrow{d} = (-9, 4)$

O si el vector director es $(36, -54)$, como $(36, -54) \overset{:18}{\approx} (2, -3)$, podemos tomar como vector director $\overrightarrow{d} = (2, -3)$

2) Para obtener las ecuaciones de la recta que pasa por dos puntos A y B podemos tomar como vector director $\overrightarrow{AB}$ o cualquiera proporcional y como punto de referencia A ó B



<u>Ejemplo</u>:

Si queremos calcular las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(\frac{-3}{5}, \frac{1}{2})$ y $B(2, -1)$, como $\overrightarrow{AB} = (2 + \frac{3}{5}, -1 - \frac{1}{2}) = (\frac{13}{5}, \frac{-3}{2}) \approx (26, -15)$, para que los cálculos fuesen menos engorrosos tomaríamos como punto de referencia B(2, – 1) y como vector director $\overrightarrow{d} = (26, -15)$

3) Para obtener puntos de una recta le damos valores a λ en las ecuaciones paramétricas.
En los otros casos, le damos un valor cualquiera a una de las incógnitas sustituimos y hallamos la otra incógnita.

Ejemplos:

a) Vamos a obtener puntos de la recta $r:\begin{cases} x=-1+3\lambda \\ y=5-\lambda \end{cases}$, distintos del punto de referencia (– 1, 5).

Para ello, le damos valores a λ (los que queramos).

Por ejemplo, si $\lambda = 1 \rightarrow \begin{cases} x=-1+3.1 \\ y=5-1 \end{cases} \rightarrow$ punto (2, 4)   Si $\lambda = -2 \rightarrow \begin{cases} x=-1+3.(-2) \\ y=5-(-2) \end{cases} \rightarrow$ punto (–7, 7)

b) Vamos a obtener puntos de la recta 3x – 2y + 7 = 0. Para ello, le damos un valor a una incógnita (el que queramos). Por ejemplo, x = 1 → 3.1 – 2y + 7 = 0 → 10 = 2y → y = 5 → punto (1, 5)

$y = -3 \rightarrow 3x - 2(-3) + 7 = 0 \rightarrow 3x = -13 \rightarrow x = \frac{-13}{3} \rightarrow$ punto $(\frac{-13}{3}, -3)$

4) A partir de cualquiera de las ecuaciones de la recta podemos obtener un punto P de la recta, un vector director $\vec{d}$, la pendiente m y un vector normal $\vec{n}$.

Ejemplos:

a) $r:\begin{cases} x=5\lambda \\ y=7-\lambda \end{cases} \Rightarrow P(0, 7)\in r$, $\vec{d}=(5,-1)$, $m=\frac{-1}{5}$ $\vec{n}=(1,5)$

b) $r:\frac{x-4}{-2}=y+1 \Rightarrow P(4,-1)\in r$, $\vec{d}=(-2,1)$, $m=\frac{-1}{2}$, $\vec{n}=(1,2)$

c) r: 2(x – 1) – 5(y + 3) = 0 → r: 2x – 5y – 17 = 0

$y=0 \rightarrow 2x-17=0 \rightarrow x=\frac{17}{2} \Rightarrow P(\frac{17}{2},0)\in r$, $\vec{d}=(-b, a)=(5, 2)$, $m=\frac{2}{5}$, $\vec{n}=(2,-5)$

d) r: y + 3 = 6(x – 7) → r: y = 6x – 45 → 6x – y – 45 = 0

$x=0 \rightarrow y=-45 \Rightarrow P(0,-45)\in r$, $\vec{d}=(-b, a)=(1, 6)$, $m=6$, $\vec{n}=(-6, 1)$

5) Para que un punto P pertenezca a una recta r sus coordenadas deben cumplir sus ecuaciones.

Ejemplo:

El punto $P(-4, 5)\notin r:\begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=\lambda \end{cases}$ porque al sustituir sus coordenadas $\begin{cases} -4=1-2\lambda \rightarrow \lambda=\frac{5}{2} \\ 5=\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{2}=5$, imposible

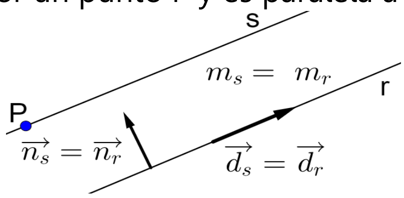
Sin embargo $P\in r: 3x+2y+2=0$ porque al sustituir sus coordenadas $3(-4)+2.5+2=0$ (se cumple)

6) Ecuación de la recta que pasa por un punto y forma un ángulo determinado con OX.

Ejemplo: Hallemos la ecuación de la recta que pasa por el punto P(1, – 2) y forma un ángulo de 60º con la horizontal:

La pendiente es $m=\text{tg } 60º=\sqrt{3}$. Luego, la ecuación punto – pendiente es $y+2=\sqrt{3}\,(x-1)$

7) Ecuación de la recta s que pasa por un punto P y es paralela a otra recta r.



Tomamos como vector director de s el vector director de r o cualquier proporcional a él. Las rectas r y s tendrán, por tanto, la misma pendiente y el mismo vector normal.

Ejemplos.

a) Hallar la ecuación general de la recta s paralela a $r: 2x - y + 4 = 0$ por el punto P(3, – 5)

$$\overrightarrow{n_s} \,//\, \overrightarrow{n_r} = (2,-1) \xrightarrow{\text{Como } P \in s} s: 2(x-3) + (-1)(y+5) = 0 \Rightarrow s: 2x - y - 11 = 0$$

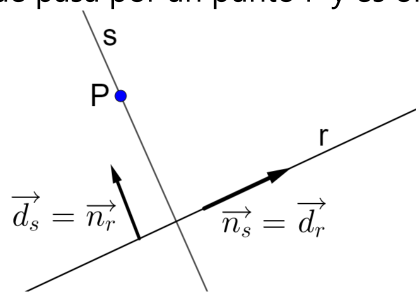
b) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta s paralela a $r: x - 2 = \dfrac{y+7}{6}$ por el punto P(1, 0)

$$\overrightarrow{d_s} \,//\, \overrightarrow{d_r} = (1,6) \xrightarrow{\text{Como } P \in s} s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 6\lambda \end{cases}$$

c) Hallar la ecuación explícita de la recta s paralela a $r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 4 + 5\lambda \end{cases}$ por el punto P(1, 6)

$$\overrightarrow{d_s} \,//\, \overrightarrow{d_r} = (-1,5) \Rightarrow m_s = m_r = \frac{5}{-1} = -5 \xrightarrow{\text{Como } P \in s} s: y - 6 = -5(x-1) \Rightarrow s: y = -5x + 11$$

8) Hallar la ecuación de la recta s que pasa por un punto P y es ortogonal a otra recta r.



Tomamos como vector director de s el vector normal de r o cualquier proporcional a él. Recíprocamente, el vector normal de s será vector director de r.

Ejemplos.

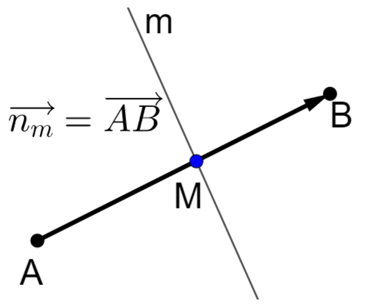
a) Hallar la ecuación continua de la recta s perpendicular a $r: 2x - y + 4 = 0$ por el punto P(1, –2)

$$\overrightarrow{d_s} \,//\, \overrightarrow{n_r} = (2,-1) \xrightarrow{\text{Como } P \in s} s: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1}$$

b) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta s ortogonal a r: y = 3x + 1 por el punto P(7, – 4)

$$\text{Como } r: 3x - y + 1 = 0,\ \overrightarrow{n_r} = (3,-1) \Rightarrow \overrightarrow{d_s} \,//\, \overrightarrow{n_r} = (3,-1) \xrightarrow{\text{Como } P \in s} s: \begin{cases} x = 7 + 3\lambda \\ y = -4 - \lambda \end{cases}$$

9) Hallar la ecuación de la mediatriz m de un segmento AB (recta que pasa por su punto medio M y es perpendicular al segmento)



Tomamos como vector normal de m el vector $\overrightarrow{AB}$ o cualquier proporcional a él.

ACTIVIDADES

1.- Halla la ecuación de la recta r que se indica en cada uno de los siguientes casos:

a) Contiene al lado AC del triángulo A(1, 3), B(–4, 0) y C(– 2, –1) (ecuación implícita)

b) Pasa por (0, –2) y es paralela a la que pasa por los puntos P(3, 4) y Q(2, 1) (ecuación explícita)

c) Contiene al punto A(3 , 2) y es ortogonal a s: 2x – y + 1 = 0 (ecuación punto-pendiente)

d) Pasa por el punto (–3, 3) y tiene pendiente $\frac{-3}{5}$ (unas ecuaciones paramétricas)

e) Corta a OX en el punto de abscisa 7 y forma con él un ángulo de 30º (una ecuación continua)

f) Pasa por el punto (2, –5) y es perpendicular al vector $\overrightarrow{u}=(-1,3)$ (unas ecuaciones paramétricas)

g) Tiene triple pendiente que la bisectriz del II y IV cuadrante y pasa por el origen de coordenadas (ecuación general)

h) Pasa por el origen de coordenadas y por el punto medio del segmento de extremos (1, –3) y (5, 2) (ecuación explícita)

Solución: a) 4x – 3y + 5 = 0 b) y = 3x – 2 c) $y-2=\frac{-1}{2}(x-3)$ d) $\begin{cases} x=-3+5\lambda \\ y=3-3\lambda \end{cases}$

e) $\frac{x-7}{3}=\frac{y}{\sqrt{3}}$ f) $\begin{cases} x=2+3\lambda \\ y=-5+\lambda \end{cases}$ g) 3x + y = 0 h) $y=\frac{-1}{6}x$

2.- Comprueba si los puntos A(–2, 3) y B(1, –3) pertenecen a la recta r que pasa por (–2, 6) y tiene la dirección del vector (1, –3). Calcula el punto C de r que tiene ordenada igual a 5.

Solución: $A \notin r$ $B \in r$ $C(\frac{-5}{3}, 5)$

3.- Halla la ecuación de la recta paralela al eje Y que pasa por (–3, 5). *Solución:* x = –3

4.- Calcula el valor de k para que la recta que pasa por los puntos A(2, –1) y B(3, k) pase también por el punto C(1, – 4). *Solución:* k = 2

5.- Encuentra el valor del parámetro k para que la recta 4x – ky – 7 = 0 tenga pendiente 3.
Solución: k = 4/3

6.- Halla la ecuación explícita de la recta perpendicular a 5x + 4y – 3 = 0 que corta a la recta 6(x – 1) – (y – 1) = 0 en x = 2. *Solución:* $y=\frac{4}{5}x+\frac{27}{5}$

7.- Dada la recta de ecuación y = –3x + 5, obtén un punto de la recta y la pendiente. Escribe todas sus otras ecuaciones.

Solución

Por ejemplo, $A(0,5) \in r$

La pendiente es $m = -3 \Rightarrow$ un vector director es $\overrightarrow{d} = (1, -3)$

Ecuación vectorial $r: \overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + \lambda \overrightarrow{d}$ $\Rightarrow$ Ecuaciones paramétricas $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 5 - 3\lambda \end{cases}$ $\Rightarrow$ Ecuación continua $r: x = \frac{y-5}{-3}$

Ecuación punto-pendiente $\Rightarrow$ $r: y - 5 = -3(x - 0)$ Ecuación implícita o general $r: 3x + y - 5 = 0$ Ecuación normal $r: 3(x - 0) + (y - 5) = 0$.

8.- Dada la recta r: 2x – 5y + 12 = 0.

a) Calcula dos puntos de la misma. b) Halla un vector normal y una ecuación normal

c) Halla un vector director y una ecuación continua

d) Calcula la pendiente, la ecuación punto-pendiente y la ecuación explícita

e) Halla los ángulos que forma con los ejes de coordenadas

Solución: a) Por ejemplo, $A(0,\frac{12}{5})$; $B(-6,0)$ b) $\overrightarrow{n_r}=(2,-5)$ $r:2(x+6)-5(y-0)=0$

c) $\overrightarrow{d_r}=(5,2)$ $r:\frac{x+6}{5}=\frac{y}{2}$ d) $m_r=\frac{2}{5}$; $r: y-0=\frac{2}{5}(x+6)$; $y=\frac{2}{5}x+\frac{6}{5}$

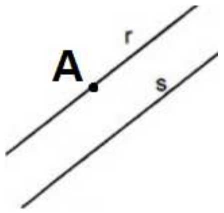
e) 21º 48´ 5,07´´ y 68º 11´ 54,93´´

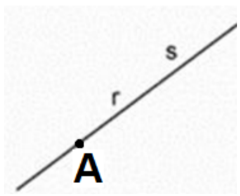
9.- Halla la ecuación implícita de la mediatriz del segmento de extremos A(4, 3) y B(–5, 7)
Solución: 18x – 8y + 49 = 0

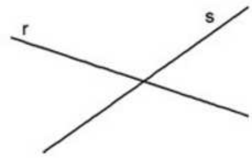
10.- Dados los puntos A(0, –1) y B(1, 2), hallar las coordenadas de todos los puntos P situados sobre la recta x + y = 2 de forma que PA y PB sean perpendiculares. *Solución:* (0, 2) y (2, 0)

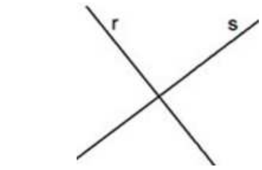
3.- REPASO: POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS

Cuándo tenemos dos rectas en el plano, únicamente se pueden dar las siguientes situaciones:

<table>
<tr><td>PARALELAS</td><td>COINCIDENTES</td><td>SECANTES NO PERPENDICULARES</td><td>SECANTES PERPENDICULARES</td></tr>
<tr>
<td>

$\overrightarrow{d_r} \,//\, \overrightarrow{d_s}$ y $A\in r \rightarrow A\notin s$
ó
Si r: y = mx + n,
s: y =m´x + n´
m = m´ y n ≠ n´
ó
Si r: ax + by + c = 0,
s: a´x + bý + c´ = 0,
$\frac{a}{a´}=\frac{b}{b´}\neq\frac{c}{c´}$</td>
<td>

$\overrightarrow{d_r} \,//\, \overrightarrow{d_s}$ y $A\in r \rightarrow A\in s$
ó
Si r: y = mx + n,
s: y =m´x + n´
m = m´ y n = n´
ó
Si r: ax + by + c = 0,
s: a´x + bý + c´ = 0,
$\frac{a}{a´}=\frac{b}{b´}=\frac{c}{c´}$</td>
<td>

$\overrightarrow{d_r} \not\parallel \overrightarrow{d_s}$ y $\overrightarrow{d_r}.\overrightarrow{d_s}\neq 0$
ó
Si r: y = mx + n,
s: y =m´x + n´
m ≠ m´ y mm´ ≠ – 1
ó
Si r: ax + by + c = 0,
s: a´x + bý + c´ = 0,
$\frac{a}{a´}\neq\frac{b}{b´}$ y aa´+ bb´≠ 0</td>
<td>

$\overrightarrow{d_r} \not\parallel \overrightarrow{d_s}$ y $\overrightarrow{d_r}.\overrightarrow{d_s}=0$
ó
Si r: y = mx + n,
s: y =m´x + n´
mm´ = – 1
ó
Si r: ax + by + c = 0,
s: a´x + bý + c´ = 0,
aa´+ bb´= 0</td>
</tr>
</table>

En el caso de que r y s sean secantes, para calcular el punto donde se cortan se resuelve el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas

Ejemplos:

1) $r:\begin{cases}x=1-\lambda\\ y=-2+3\lambda\end{cases}$ $s:6x+2y+1=0 \Rightarrow \begin{matrix}\overrightarrow{d_r}=(-1,3)\\ \overrightarrow{d_s}=(-2,6)\,//\,(-1,3)\end{matrix}$. Como $\begin{matrix}A(1,-2)\in r\\ 6.1+2.(-2)+1\neq 0\rightarrow A\notin s\end{matrix} \Rightarrow r\,//\,s$

2) $r: -9x+6y-15=0 \quad s: 6x-4y+10=0 \Rightarrow$ Como $\dfrac{-9}{6}=\dfrac{6}{-4}=\dfrac{-15}{10}$, $r=s$

3) $r: y=5x-4 \quad s: y=-5x-4 \Rightarrow \begin{matrix} m_r=5 \\ m_s=-5 \end{matrix}$. Como $m_r \neq m_s$, r y s son secantes no perpendiculares

pues $m_r m_s = 5(-5) \neq -1$. Punto de corte : $\begin{cases} y=5x-4 \\ y=-5x-4 \end{cases} \Rightarrow 5x-4=-5x-4 \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y=-4 \end{matrix}. \Rightarrow P(0,-4)$

4) $r: \begin{cases} x=1-3\lambda \\ y=2+\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x=2+\mu \\ y=-5+3\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \overrightarrow{d_r}=(-3,1) \\ \overrightarrow{d_s}=(1,3) \end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{d_r} \not\parallel \overrightarrow{d_s}$. Como además $\overrightarrow{d_r}.\overrightarrow{d_s}=0$ son

secantes perpendiculares. Hallemos el punto P de corte $\begin{cases} 1-3\lambda=2+\mu \\ 2+\lambda=-5+3\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3\lambda+\mu=-1).3 \\ \lambda-3\mu=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9\lambda+3\mu=-3 \\ \lambda-3\mu=-7 \end{cases}$

Sumando las ecuaciones $10\lambda=-10 \to \lambda=-1$. Sustituyendo, $-1-3\mu=-7 \to \mu=2$

Sustituimos ahora en las ecuaciones de r (o en las de s): $\begin{cases} x=1-3(-1) \\ y=2+(-1) \end{cases} \to \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases} \to P(4,1)$

Ejercicio resuelto:

Estudia la posición relativa r: mx – (2m – 2)y + 1 = 0 y s: (8m – 3)x + (2 – 10m)y – 1 = 0 según los valores del parámetro m.

Resolución:

$$\frac{m}{8m-3}=\frac{-2m+2}{2-10m} \Leftrightarrow m(2-10m)=(8m-3)(-2m+2) \to 2m-10m^2=-16m^2+22m-6$$

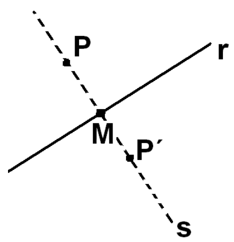
$$6m^2-20m+6=0 \to \begin{matrix} m=3 \\ m=\frac{1}{3} \end{matrix}. \qquad \text{Si } m=3 \to \frac{3}{21}=\frac{-4}{-18} \neq \frac{1}{-1} \Rightarrow r \parallel s \qquad \text{Si } m=\frac{1}{3} \to \frac{1/3}{-1/3}=\frac{4/3}{-4/3}=\frac{1}{-1} \Rightarrow r=s$$

Si $m \neq 3$ y $m \neq \frac{1}{3} \Rightarrow$ r y s son secantes. Serán perpendiculares sólo cuando $m(8m-3)+(-2m+2)(2-10m)=0$

$$28m^2-27m+4=0 \to m=\frac{27 \pm \sqrt{281}}{56}$$

Simétrico de un punto respecto de una recta

El punto simétrico de un punto P respecto de una recta r es el punto P´ del dibujo que cumple $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MP'}$ y $\overline{PP'} \perp r$, siendo M el punto medio de PP´



Para calcular el punto simétrico P´:

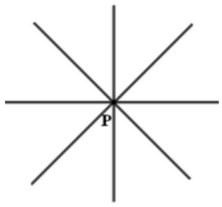
1º) Hallamos la ecuación de la recta s que pasa por P y es perpendicular a r

2º) Calculamos el punto de corte M de r y s (resolviendo el sistema con las ecuaciones de r y s)

3º) Usando que M es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$, podemos hallar P´ fácilmente

Haz de rectas secantes

El haz de rectas secantes de base un punto dado $P(x_0, y_0)$ es el conjunto de las infinitas rectas que contienen a dicho punto. La ecuación del haz es $\boxed{h_P: y - y_0 = m(x - x_0)}$, con $m \in R$. Dando valores a m se obtienen las infinitas rectas del haz.



Si r: ax + by + c = 0, s: a´x + bý + c´= 0 son rectas secantes, el haz de rectas que determinan r y s es $\boxed{h_{r,\,s}: \begin{matrix} ax+by+c+k(a´x+b´y+c´)=0, \text{ con } k\in R \\ a´x+b´y+c´=0 \end{matrix}}$. Dando valores a k se obtienen las infinitas rectas del haz.

Ejemplos.

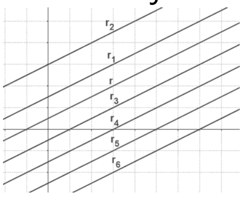
1) El haz de rectas de base el punto P(– 7, 3) es h_P: y – 3 = m(x + 7), con $m \in R$

2) El haz de rectas que determinan las rectas $r: 3x+y-1=0 \quad s: -2x+5y+3=0$ es

$$\boxed{h_{r,\,s}: \begin{matrix} 3x+y-1+k(-2x+5y+3)=0, \text{ con } k\in R \\ -2x+5y+3=0 \end{matrix}}$$

Haz de rectas paralelas

El haz de rectas paralelas a una recta dada r es el conjunto de las infinitas rectas paralelas a r.



Si r: ax + by + c = 0, el haz de rectas paralelas a r es: $\boxed{h_r: \ ax+by+k=0, \text{ con } k\in R}$. Dando valores a k se obtienen las infinitas rectas del haz.

Si r: y = mx + n, el haz de rectas paralelas a r es: $\boxed{h_r: \ y=mx+k, \text{ con } k\in R}$. Dando valores a k se obtienen las infinitas rectas.

Ejemplos.

1) El haz de rectas paralelas a la recta r: x – 6y + 3 = 0 es $h_r: \ x-6y+k=0, \text{ con } k\in R$

2) El haz de rectas paralelas a la recta r: y = 9x + 5 es $h_r: \ y=9x+k, \text{ con } k\in R$

ACTIVIDADES

1.- Estudia la posición relativa de las siguientes rectas. Si son secantes, halla el punto de corte:

a) $r: \begin{cases} x=1-5\lambda \\ y=2\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x=2+3\mu \\ y=-4 \end{cases}$ b) $r: -15x+5y+7=0 \quad s: 6x-2y+5=0$

c) $r: y=x-4 \quad s: y=x+3$ d) $r: \begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=3+6\lambda \end{cases} \quad s: y=\frac{1}{3}x-5$ e) $r: \frac{x+4}{3}=y+7 \quad s: \begin{cases} x=2+3\lambda \\ y=-5+\lambda \end{cases}$

f) $r: \begin{cases} x=-3\lambda \\ y=7\lambda \end{cases} \quad s: x+y-8=0$ g) $r: \frac{x-2}{-3}=\frac{y+5}{0} \quad s: y=-5$ h) $r: \frac{x-2}{10}=\frac{y+5}{-15} \quad s: 21x+14y+32=0$

i) $r: 2x-12y+3=0 \quad s: y=-6x+5$

Solución: a) secantes; P(11, –4) b) paralelas c) paralelas

d) perpendiculares; P(33/10, –39/10) e) coincidentes f) secantes; P(–6, 14)

g) coincidentes h) paralelas i) perpendiculares; P(57/74, 14/37)

2.- Averigua qué rectas r: y – 3 = 5(x – 1) $s: y = \frac{2x}{5}$ $t: \frac{x+1}{5} = \frac{1-y}{2}$ son paralelas a u: 2x – 5y + 4 = 0

Solución: Sólo la recta s

3.- Determina el valor o valores del parámetro para que las rectas cumplan lo que se pide:
a) r: kx + 2y – 3 = 0 s: x +2ky + 1 = 0 sean paralelas
b) r: nx – 2y – 4n = 0, s: x – 3y – 4 = 0 sean coincidentes
c) r: (2m – 2)x – y + 2m = 0 , s: (m – 1)x + (m + 1)y – 17 = 0 sean paralelas
d) La recta r: x – by = –4b – 1 sea coincidente con la recta s que pasa por los puntos A(–1, 4) y B(2, 3)
e) r: (a – 1)x – 2y + 2a = 0, s: (3a – 4)x + y + a^2 = 0 sean perpendiculares
f) r: x – my + 2n = 0, s: 2mx + ny + 1 = 0 sean ortogonales y r pase por P(0, 2)
g) r: 3x – 5y + 2 = 0 , s: kx + 2y – 2 = 0 se corten en el punto A(1, 1)
h) $r: \begin{cases} x = -m\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \end{cases}$ $s: y = \frac{4}{3}x - 2$ sean perpendiculares
i) $r: \frac{x+1}{a} = \frac{y}{2}$ $s: bx - 2y + 7 = 0$ sean perpendiculares y s pase por P(–1, 2)
j) $r: y - x + 3 = 0$ s: mx + 3y – 1 = 0 no se corten

Solución: a) k = ±1 b) n = 2/3 c) m = 1, m = –3/2 d) b = –3 e) a = 2, a = 1/3

f) m = n = 2 g) k = 0 h) m = 3/8 i) a = –3, b = 3 j) m = –3

4.- Determina el valor de "a" para que las rectas r: ax + (a – 1)y + 1 = 0, s: 2ax + ay – 2 = 0 sean:
a) paralelas b) perpendiculares. *Solución:* a) a = 2 b) a = –1

5.- Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas r: x – 3y + 1 = 0, s: 2x + y – 12 = 0 y por el punto P(3, –2). *Solución:* –2x + y + 8 = 0

6.- Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas r: x – y + 5 = 0 , s: x + y + 1 = 0 y es: a) paralela a la recta t: 2x + y + 1 = 0 b) ortogonal a la recta t: 2x + y + 1 = 0

Solución: a) 2x + y + 4 = 0 b) x – 2y + 7 = 0

7.- Sea ABC el triángulo cuyos lados están en las rectas r: 2x + y – 13 = 0, s: x – y – 2 = 0, t: y + 1 = 0.

a) Halla los vértices del triángulo

b) Calcula el baricentro (punto de corte de las medianas). Una mediana es la recta que pasa por un vértice y el punto medio del lado opuesto.

c) Calcula el circuncentro (punto de corte de las mediatrices). Una mediatriz es la recta perpendicular a un lado que pasa por su punto medio.

d) Calcula el ortocentro (punto de corte de las alturas). Una altura es la recta que pasa por un vértice y es perpendicular del lado opuesto.

Solución: a) (5, 3), (7, –1), (1, –1) b) (–13/3, 1/3) c) (4, 0) d) (5, 1)

8.- Calcular el simétrico del punto P respecto de la recta en los siguientes casos:
a) P(1, 1), r: y = 3x – 7 b) P(0, 6), r: y = 2x – 3 c) P(1, 5) y la bisectriz del I y III cuadrante

Solución: a) (4, 0) b) (36/5, 12/5) c) (5, 1)

9.- La recta r: x – y + 1 = 0 es la mediatriz del segmento AB siendo A(3, 2). Halla el punto B.

Solución: (1/3, 10/3)

10.- Halla el haz de rectas de vértice el punto P(–2, 3) y determina la ecuación de la recta h del haz que tiene pendiente $\frac{-1}{2}$. *Solución:* h_P: y – 3 = m(x + 2), con m ∈ R ; h: x + 2y – 4 = 0

11.- Calcula el haz de rectas determinado por las rectas r: y = 2x – 3   s: y = 3x – 5, halla su vértice V y la recta h del haz que pasa por el punto A(3, 5).

Solución

$$h_{r,\,s}: \begin{array}{c} 2x-y-3+k(3x-y-5)=0,\ \text{con}\ k\in R \\ 3x-y-5=0 \end{array}$$;   V(2, 1) ;   h: –4x + y + 7 = 0

12.- Determina el haz de rectas que tienen pendiente –2 y la recta h del haz que pasa por el origen.

Solución: h_k = –2x + k, con k ∈ R ; h: y = –2x

13.- Obtén el haz determinado por las rectas r: 2x + y = 0 y s: 3x – 2y = 0, halla su vértice V y la recta h del haz que tiene pendiente $\frac{-2}{3}$.

Solución

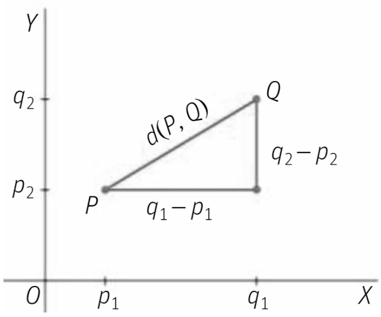
$$h_{r,\,s}: \begin{array}{c} 2x+y+k(3x-2y)=0,\ \text{con}\ k\in R \\ 3x-2y=0 \end{array}$$;   V(0, 0) ; h: 10x – 9y = 0

14.- Un rayo de luz r pasa por el punto de coordenadas (1, 2) e incide sobre el eje OX formando con éste un ángulo de 135º. Suponiendo que sobre el eje de abscisas se encuentra un espejo, hallar la ecuación del rayo r y del rayo reflejado s. *Solución:* r: y = –x + 3   s: y = x + 3

4.- DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS Y DE UN PUNTO A UNA RECTA

Distancia entre dos puntos

Se define la distancia entre dos puntos P y Q, y se representa por d(P, Q), como la longitud del segmento $\overline{PQ}$. Si $P(p_1, p_2)$ y $Q(q_1, q_2)$ entonces d(P, Q) = $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2}$



Ejemplo: Halla la distancia entre los puntos (2, –3) y (–4, 7): d = $|(-6, 10)| = \sqrt{(-6)^2+10^2} = \sqrt{136}$ u

Aplicaciones

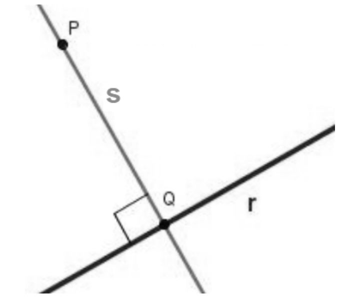
1) Calcular el punto que equidista de tres puntos A, B y C no alineados (recuerda que este punto se llama circuncentro del triángulo ABC):
Le llamamos P(x, y) al punto que buscamos y usando que d(P, A) = d(P, B) = d(P, C) obtenemos un sistema de ecuaciones con incógnitas x, y.
La solución del sistema nos proporciona las coordenadas del punto P.

2) Hallar los puntos de una recta que equidistan de dos puntos dados A y B:
Le llamamos P(x, y) al punto que buscamos usamos que d(P, A) = d(P, B).
Resolviendo el sistema con la ecuación o ecuaciones de la recta y la ecuación anterior se obtienen las soluciones.

3) Calcular el perímetro de una figura:
Hallamos la longitud de cada lado como distancia entre los vértices correspondientes y luego sumamos las longitudes de todos los lados

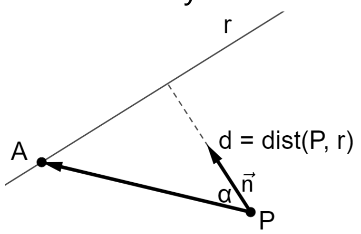
Distancia de un punto a una recta

Se define la distancia de un punto P a una recta r, y se representa por d(P, r), como la menor de las distancias del punto P a los puntos de la recta. Dicha distancia coincide con la longitud del segmento $\overline{PQ}$ (perpendicular a la recta) que puedes ver en el siguiente dibujo:



1er método:
Hallamos la recta s que pasa por P y es perpendicular a r. Después calculamos Q, que es el punto de corte de las rectas r y s. Por último, d(P, r) = d(P, Q) = $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$

2º método:
Sea r una recta del plano que pasa por un punto $A(a_1, a_2)$ y tiene vector normal $\overrightarrow{n} = (a, b)$ entonces la ecuación general de la recta r la podemos escribir así: ax + by + c = 0. Sea $P(x_0, y_0)$ un punto del plano. Sea α el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{n}$ y $\overrightarrow{PA}$



$\overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{PA} = \left|\overrightarrow{n}\right|.\left|\overrightarrow{PA}\right|.\cos\alpha$. Por otra parte, $\cos\alpha = \dfrac{\text{cat cont}}{\text{hipot}} = \dfrac{d}{\left|\overrightarrow{PA}\right|} \Rightarrow d = \left|\overrightarrow{PA}\right|.\cos\alpha = \dfrac{\left|\overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{PA}\right|}{\left|\overrightarrow{n}\right|}$

Se toma el valor absoluto porque la distancia no puede ser negativa

$$d = \frac{\left|(a, b).(a_1 - x_0, a_2 - y_0)\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\left|aa_1 - ax_0 + ba_2 - by_0\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.\text{Como } A \in r \to aa_1 + ba_2 + c = 0 \to aa_1 + ba_2 = -c$$

$$\text{Luego, } \operatorname{dist}(P, r) = \frac{\left|-ax_0 - by_0 - c\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow \boxed{\operatorname{dist}(P, r) = \frac{\left|ax_0 + by_0 + c\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Aplicaciones

1) Hallar los puntos de una recta r que están a una distancia determinada, d, de otra recta s:
Le llamamos P(x, y) al punto de r que buscamos y usamos que d(P, s) = d.
Resolviendo el sistema con la ecuación o ecuaciones de la recta y la ecuación anterior se obtienen las soluciones.

2) Hallar los puntos de una recta r que equidistan de dos rectas, s y t:
Le llamamos P(x, y) al punto de r que buscamos y usamos que d(P, s) = d(P, t).
Resolviendo el sistema con la ecuación o ecuaciones de la recta r y la ecuación anterior se obtienen las soluciones.

3) Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por un punto A y están a una distancia determinada, d, de un punto B:
Escribimos el haz de rectas, h_m, de base el punto A. Usamos que d(B, h_m) = d. Resolviendo la ecuación obtenemos el valor de k que sustituido en la ecuación del haz nos da la recta pedida

4) Hallar el área de un triángulo ABC:
Hallamos la base: b = d(A, B)
Hallamos la recta r que pasa por A y B
Hallamos la altura: h = d(C, r)
Hallamos el área sustituyendo en la fórmula: $A(\text{triángulo}) = \frac{bh}{2}$

(Nota: si el triángulo fuese rectángulo el área sería $A(\text{triángulo rectángulo}) = \frac{\text{cateto.cateto}}{2}$)

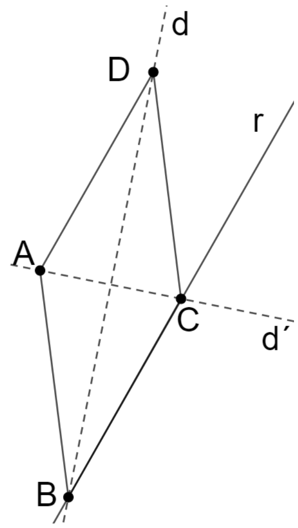
5) Hallar el área de un cuadrado ABCD del que conocemos un vértice A y la recta r que contiene a la diagonal BD:
Hallamos la diagonal BD: diagonal BD: d = 2.d(A, r)
Usamos el teorema de Pitágoras: $d^2 = l^2 + l^2 \to d^2 = 2\,l^2$. Luego, $A(\text{cuadrado}) = l^2 = \frac{d^2}{2}$.

<u>Ejercicios resueltos</u>

1) De un rombo conocemos un vértice A(−3, 2), la ecuación de la recta que contiene a uno de los lados, r: 7x – 4y = 10 y la ecuación de la recta que contiene a una de las diagonales, d: 5x – y + 4 = 0. Calcula las coordenadas de los demás vértices y el área del rombo.

<u>Resolución</u>

Observamos que $A \notin r$, $A \notin d$



La recta que contiene a la otra diagonal, d´, pasa por A(–3, 2) y es $\perp$ a d, luego $\overrightarrow{n´} = (1, 5) \Rightarrow d´: 1(x+3)+5(y-2)=0$
$d´: x+5y-7=0$

El segundo vértice es $B = r \cap d = \begin{cases} 7x-4y=10 \\ 5x-y+4=0 \end{cases} \to B(-2, -6)$.

El tercer vértice es C, simétrico de A respecto de d $\to$ C(2, 1)

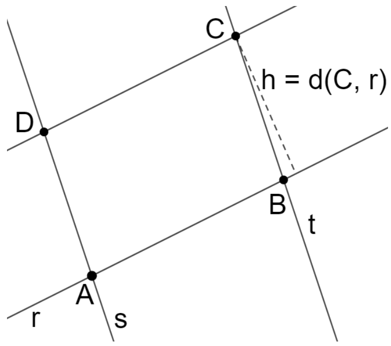
El cuarto vértice es D, simétrico de B respecto de d´ $\to$ D(1, 9)

Diagonal mayor: $\left|\overrightarrow{BD}\right| = |(3, 15)| = \sqrt{234}$ Diagonal menor: $\left|\overrightarrow{AC}\right| = |(5, -1)| = \sqrt{26}$

$$A(\text{rombo}) = \frac{\text{diagonal mayor. diagonal menor}}{2} = \frac{\sqrt{234}\,.\,\sqrt{26}}{2} = \frac{\sqrt{6084}}{2} = \frac{78}{2} = 39\ u^2$$

2) Determinar el área de un paralelogramo ABCD, sabiendo que la ecuación del lado AB es r: $x - 2y = 0$, la ecuación del lado AD es s: $3x + y = 0$ y las coordenadas del punto C son (3, 5).

Resolución



$$\text{t pasa por C(3, 5) y es // a s} \Rightarrow t: 3x+y+k=0 \xrightarrow{C\in t} 3.3+5+k=0 \rightarrow k=-14 \Rightarrow t: 3x+y-14=0$$

$$A = r \cap s = \begin{cases} x-2y=0 \\ 3x+y=0 \end{cases} \rightarrow A(0,\ 0) \qquad B = r \cap t = \begin{cases} x-2y=0 \\ 3x+y-14=0 \end{cases} \rightarrow B(4,\ 2).$$

$$\text{Base}: \left|\overrightarrow{AB}\right| = |(4,\ 2)| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \qquad \text{Altura} = d(C, r) = \frac{|3-2.5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Area} = \text{base . altura} = 2\sqrt{5}\ .\ \frac{7}{\sqrt{5}} = 14\ u^2$$

ACTIVIDADES

1.- Calcula el punto que equidista de los puntos A(3, 3), B(6, 2) y C(8, –2). *Solución:* (3, –2)

2.- Dados los puntos A(4, –2) y B(10, 0), halla el punto de la bisectriz del II y IV cuadrantes que equidista de ambos puntos. *Solución:* (10, –10)

3.- Halla el perímetro del triángulo ABC donde A(5, 4), B(–3, 6) y C(–3, 4). *Solución:* $10 + 2\sqrt{17}$ u

4.- Halla la distancia del punto (–2, 0) a la recta $3x + 2y + 2 = 0$. *Solución:* $\frac{4\sqrt{13}}{13}$ u

5.- Calcula los valores de k para que la distancia de P(k, 1) a r: $3x - 4y + 1 = 0$ sea 3 unidades.
Solución: k = 6, k = –4

6.- Calcula los puntos de r: $7x - y - 28 = 0$ que distan 5 unidades de s: $3x - 4y - 12 = 0$.
Solución: (3, –7) y (5, 7)

7.- Determina los puntos de la recta r: $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2t \end{cases}$ que distan $\sqrt{10}$ unidades de la recta s: $y = 3x + 1$.

Solución: (3, 0) y (–1, 8)

8.- Calcula las puntos de la recta $x + y - 15 = 0$ que equidistan de las rectas $y - 2 = 0$, $3y = 4x - 6$.
Solución: (29/3, 16/3) y (–7, 22)

9.- Halla la ecuación de la recta que pasa por A(1, –2) y dista 2 unidades del punto B(3, 1).
Solución: $-5x + 12y + 29 = 0$

10.- Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas r: $x - 3y + 1 = 0$ y s: $2x + 5y - 9 = 0$ y cuya distancia al origen es $\sqrt{5}$ *Solución:* $2x + y - 5 = 0$

11.- Calcula el área del triángulo ABC en los casos:
a) A(1, –4), B(3, 2) y C(–2, 0) b) A(5, 4), B(–3, 6) y C(–3, 4) *Solución:* a) 13 u^2 b) 8 u^2

12.- Calcula el área del triángulo que determinan la recta x – 2y + 8 = 0 y los ejes coordenados.
Solución: 16 u^2

13.- Dados los puntos A (2, 1), B (–3, 5) y C (4, m), calcula los valores de m para que el triángulo ABC tenga área 6 u^2. *Solución:* m = 9/5, m = –3

14.- Calcula el perímetro y área del triángulo ABC siendo A(–4, 2), B(5, –1) y C(–2, 8)
Solución: $P = \left(\sqrt{90}+\sqrt{130}+\sqrt{40}\right)$ u A = 30 u^2.

15.- Halla el área de un cuadrado si un vértice es A(0, 7) y una de sus diagonales está sobre la recta r: 3x – 2y – 6 = 0. *Solución:* a) 800/13 u^2.

16.- Comprueba que el cuadrilátero de vértices A(3, 3), B(6, 0), C(4, –4) y D(0, 0) es un trapecio rectángulo y halla su área. *Solución:* $\begin{matrix} \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0 \end{matrix} \Rightarrow$ Es un trapecio rectángulo, Área = 21 u^2.

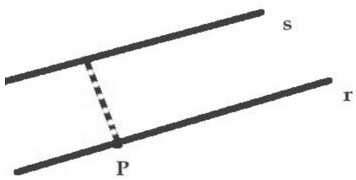
17.- Se considera un trapecio rectángulo ABCD cuyo lado oblicuo es CD. Se sabe que A(1, 2), B(–1, 7) y la ecuación de la recta CD es r: x + y – 1 = 0. Calcular los vértices C y D y el área del trapecio.
Solución: $C(\frac{-32}{7}, \frac{39}{7})$ $D(\frac{-3}{7}, \frac{10}{7})$ $\text{Área} = \frac{290}{14} \cong 20{,}7\ u^2$

5.- DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS Y BISECTRICES DE DOS RECTAS

Distancia entre dos rectas

Si r y s son secantes o coincidentes, entonces la distancia es 0

Si son paralelas, se toma un punto de una de las rectas y se calcula su distancia a la otra recta



d(r, s) = d(P, s)

$\text{Si } r \parallel s \Rightarrow r: ax+by+c=0 \quad s: ax+by+c'=0 \;\text{ y }\; P(x_0, y_0)\in r \to ax_0+by_0+c=0$

$$d(r,s)=d(P,s)=\frac{|ax_0+by_0+c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}.\ \text{Como } ax_0+by_0=-c \Rightarrow \boxed{d(r,s)=\frac{|c'-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

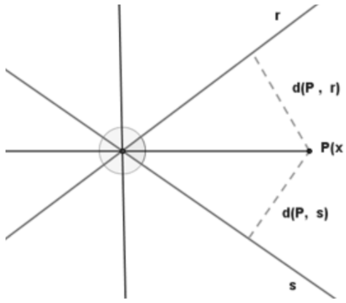
Ejemplo

Determina k para que la distancia entre las rectas r: 4x – 3y + k = 0 s: 4x – 3y + 2k – 1 = 0 sea de 6 unidades

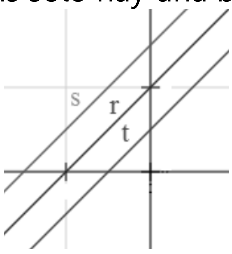
$$d(r,s)=\frac{|c'-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|2k-1-k|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|k-1|}{5}=6 \Rightarrow |k-1|=30 \Rightarrow \begin{matrix} k-1=30\to k=31 \\ k-1=-30\to k=-29 \end{matrix}$$

Bisectrices de dos rectas

Las bisectrices de dos rectas r y s son los puntos que equidistan de las dos rectas.
Cuando las rectas son secantes, las bisectrices son dos rectas perpendiculares que dividen a los ángulos en dos partes iguales.



Si las rectas son paralelas sólo hay una bisectriz



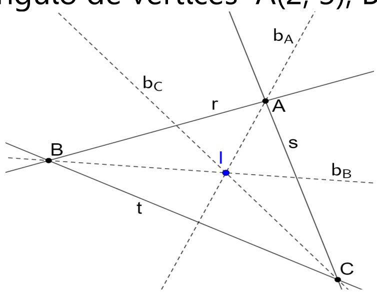
r es la bisectriz de las rectas s y t

Calculo de las bisectrices: Sean r: ax + by + c = 0, s: a´x + bý + c´= 0. Si P(x, y) es un punto de cualquiera de las bisectrices, entonces d(P, r) = d(P, s) → $\dfrac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{|a'x+b'y+c'|}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$

A partir de esta igualdad se obtienen las ecuaciones de las bisectrices

Ejemplo

Halla las bisectrices interiores del triángulo de vértices A(2, 3), B(– 1, 2) y C(3, 0) y el incentro.



$\overrightarrow{d_r} = \overrightarrow{AB} = (-3,-1) \rightarrow \overrightarrow{n_r} = (1,-3) \Rightarrow r: 1(x-2)-3(y-3)=0 \rightarrow r: x-3y+7=0$

$\overrightarrow{d_s} = \overrightarrow{AC} = (1,-3) \rightarrow \overrightarrow{n_s} = (3,1) \Rightarrow s: 3(x-2)+1(y-3)=0 \rightarrow s: 3x+y-9=0$

$\overrightarrow{d_s} = \overrightarrow{BC} = (4,-2) \rightarrow \overrightarrow{n_s} = (2,4) \parallel (1,2) \Rightarrow t: 1(x+1)+2(y-2)=0 \rightarrow t: x+2y-3=0$

Sea P(x,y) un punto de la bisectriz $b_A \Rightarrow d(P,r) = d(P,s) \Rightarrow \dfrac{|x-3y+7|}{\sqrt{10}} = \dfrac{|3x+y-9|}{\sqrt{10}}$

Luego, $\begin{matrix} x-3y+7 = 3x+y-9 \\ x-3y+7 = -3x-y+9 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2x+4y-16=0 \\ 4x-2y-2=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} b_A: x+2y-8=0 \text{ (no es bisectriz interior por ser } \parallel \text{ a t)} \\ b'_A: 2x-y-1=0 \end{matrix}$

Sea P(x,y) un punto de la bisectriz $b_B \Rightarrow d(P,r) = d(P,t) \Rightarrow \dfrac{|x-3y+7|}{\sqrt{10}} = \dfrac{|x+2y-3|}{\sqrt{5}} \xrightarrow{\frac{\sqrt{10}\,\cong\,3,2}{\sqrt{5}\,\cong\,2,2}}$

Luego, $\begin{matrix} \dfrac{x-3y+7}{3,2} = \dfrac{x+2y-3}{2,2} \\ \dfrac{x-3y+7}{3,2} = \dfrac{-x-2y+3}{2,2} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} b_B: -x-13y+25=0 \\ b'_B: 5,4x-0,2y-5,8=0 \text{ (es exterior)} \end{matrix}$

Sea P(x,y) un punto de la bisectriz $b_C \Rightarrow d(P,s) = d(P,t) \Rightarrow \dfrac{|3x+y-9|}{\sqrt{10}} = \dfrac{|x+2y-3|}{\sqrt{5}} \xrightarrow{\frac{\sqrt{10}\,\cong\,3,2}{\sqrt{5}\,\cong\,2,2}}$

Luego, $\begin{matrix} \dfrac{3x+y-9}{3,2} = \dfrac{x+2y-3}{2,2} \\ \dfrac{3x+y-9}{3,2} = \dfrac{-x-2y+3}{2,2} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} b_C: -x-13y-10,2=0 \text{ (es exterior)} \\ b'_C: 5,4x-0,2y-29,4=0 \end{matrix}$

El incentro, I, es el punto de corte de las bisectrices $\Rightarrow I = b'_A \cap b_B = \begin{cases} 2x-y-1=0 \\ -x-13y+25=0 \end{cases} \Rightarrow I(\dfrac{38}{27}, \dfrac{49}{27})$

ACTIVIDADES

1.- Halla los valores de "a" y "b" sabiendo que r: ax – y + 1 = 0 y s: 7x – by + 7 = 0 son paralelas y que r pasa por el punto (1, 2). Halla la distancia entre r y s. *Solución:* a = 1, b = 7

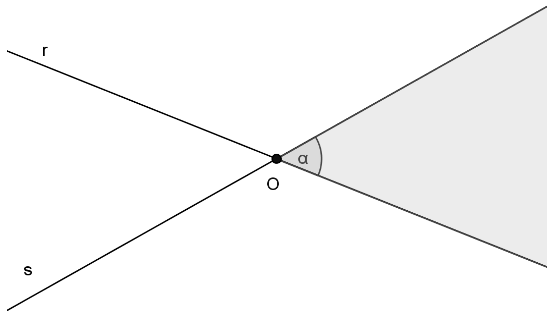
2.- Hallar las ecuaciones de las rectas paralelas a r: 3x + 4y + 2 = 0 que distan 1 unidad de ella. *Solución:* 3x + 4y + 7 = 0 y 3x + 4y – 3 = 0

3.- Halla las bisectrices de las rectas r: 3x – 4y + 1 = 0 , s: 12x – 5y = 0 y comprueba que son perpendiculares. *Solución:* 21x + 27y – 91 = 0 y 99x – 77y + 91 = 0

4.- Hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que forma la recta r: 5x + 12y – 60 = 0 con el eje de ordenadas. *Solución:* 2x – 3y + 15 = 0 y 3x + 2y – 10 = 0

6.- ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS

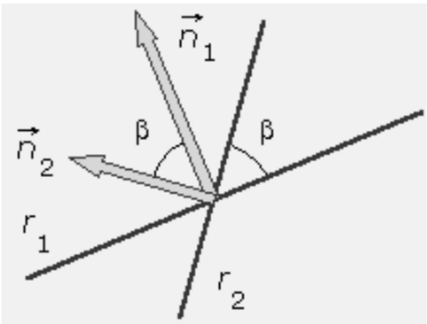
Se define el ángulo entre dos rectas r y s como el menor de los ángulos que forman entre sí sus vectores directores.



$$\text{ángulo entre r y s} = \text{menor ángulo entre } \vec{d_r} \text{ y } \vec{d_s} = \alpha = \arccos\left|\frac{\vec{d_r}\cdot\vec{d_s}}{|\vec{d_r}|\cdot|\vec{d_s}|}\right|$$

Se toma el valor absoluto porque el ángulo debe ser menor o igual que 90º

El ángulo que forman dos rectas r_1 y r_2 coincide con el ángulo que forman sus vectores normales:



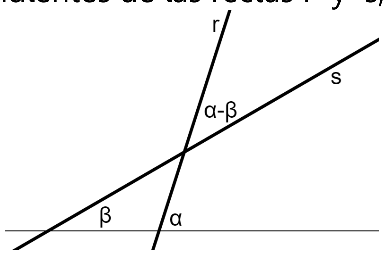
$$\text{ángulo entre } r_1 \text{ y } r_2 = \text{menor ángulo entre } \vec{n_1} \text{ y } \vec{n_2} = \alpha = \arccos\left|\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}\right|$$

Ejemplo

Hallar el ángulo entre las rectas r: 2y – x + 4 = 0, s: 4x – 3y + 1 = 0

$$\text{Fíjate que } r: -x+2y+4=0 \Rightarrow \arccos\left|\frac{\vec{n_r}\cdot\vec{n_s}}{|\vec{n_r}|\cdot|\vec{n_s}|}\right| = \arccos\left|\frac{(-1,2).(4,-3)}{\sqrt{5}\,.\,5}\right| = \arccos\left|\frac{-10}{5\sqrt{5}}\right| = 26^\circ\ 33'\ 54{,}18''$$

Si se conocen las pendientes de las rectas r y s, m y m´



m = tg α m´=tg β

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta}=\frac{m-m´}{1+mm´}\Rightarrow \boxed{\text{ángulo entre r y s}=\alpha-\beta=\operatorname{arctg}\left|\frac{m-m´}{1+mm´}\right|}$$

Se toma el valor absoluto porque el ángulo debe ser menor o igual que 90º

Ejemplo

Hallar el ángulo entre las rectas $r: y+3=\frac{1}{2}(x-1)$, s: y = x + 2

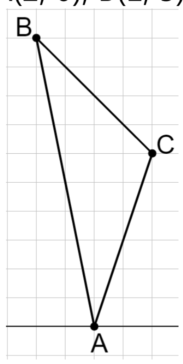
$$\operatorname{arctg}\left|\frac{m-m´}{1+mm´}\right|=\operatorname{arctg}\left|\frac{\frac{1}{2}-1}{1+\frac{1}{2}.1}\right|=\operatorname{arctg}\left|\frac{\frac{-1}{2}}{\frac{3}{2}}\right|=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=18º\ 26´\ 5{,}82´´$$

Si las rectas son paralelas o coincidentes, entonces el ángulo que forman es 0º. En este caso, $\overrightarrow{d_r} \,//\, \overrightarrow{d_s}$ y como ya sabemos m = m´.

Si las rectas fuesen perpendiculares, entonces el ángulo sería de 90º . En este caso, $\overrightarrow{d_r}\,.\,\overrightarrow{d_s}=0$ y como ya sabemos mm´= – 1

Ejercicio resuelto:

Resuelve y clasifica el triángulo ABC siendo A(2, 0), B(1, 5) y C(3,3)



$\overrightarrow{AB}=(-1,5)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{26}$ $\overrightarrow{AC}=(1,3)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{10}$ $\overrightarrow{BC}=(2,-2)\Rightarrow\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{8}$

Es escaleno porque todos los lados miden distinto

Ángulo entre AB y AC : $\arccos\frac{(-1,5).\,(1,3)}{\sqrt{26}.\sqrt{10}}=\arccos\frac{14}{\sqrt{260}}=29º\ 44´\ 41{,}57´´$

Ángulo entre BA y BC : $\arccos\frac{(1,-5).\,(2,-2)}{\sqrt{26}.\sqrt{8}}=\arccos\frac{12}{\sqrt{208}}=33º\ 41´\ 24{,}24´´$

Ángulo entre CA y CB : $\arccos\frac{(-1,-3).\,(-2,2)}{\sqrt{10}.\sqrt{8}}=\arccos\frac{-4}{\sqrt{80}}=116º\ 33´\ 54{,}1´´$

Es obtusángulo porque tiene un ángulo obtuso

ACTIVIDADES

1.- Determina el ángulo que forman las rectas r y s en los casos:
a) r: x + 2y –3 = 0, s: 3x – 5y + 4 = 0 b) r: y = x – 3, s: y = –3x + 8
Solución: a) 46º 7´ 25,45´´ b) 63º 26´ 5,82´´

2.- Dadas las rectas r: 2x – 4y + 6 = 0 s: y = 3x – 1 t: $\frac{x}{2} = y - 2$.
a) Averigua cuales son paralelas y calcula la distancia entre ellas.
b) Determina cuales son secantes y halla el ángulo que forman.

Solución

a) $r \parallel t$; $d(r, t) = \frac{2\sqrt{5}}{5}u$

b) r y s son secantes y t y s también. Al ser paralelas r y t, el ángulo entre r y s es el mismo que entre t y s y es 24º 5´ 41,43´´

3.- Halla los valores de k para que las rectas $r: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{2}$ $s: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + k\lambda \end{cases}$ formen un ángulo de 45º.

Solución: $k = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$ y $k = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$

4.- Calcula los valores de p sabiendo que las rectas r: 3x + 4y – 5 = 0 y s: px + 7y + 2 = 0 forman un ángulo cuyo seno vale 3/5. *Solución:* p = 0, p = 24

5.- Dos rectas se cortan formando un ángulo de 135°. Si una tiene una pendiente igual a –3, ¿cuál es la pendiente de la otra? *Solución:* 2 ó –1/2

6.- Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto P(2, –3) y forman un ángulo de 45º con la recta r: 3x – 4y + 7 = 0. *Solución:* x + 7y + 19 = 0 , –7x + y + 17 = 0

7.- Resuelve el triángulo ABC, siendo A(3, 1) , B(6, –2) y C(0, –4), e indica de qué tipo es (acutángulo, obtusángulo ó rectángulo, equilátero, isósceles o escaleno):

Solución

$\overrightarrow{AB} = (3,-3) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{18}$ $\overrightarrow{AC} = (-3,-5) \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{34}$ $\overrightarrow{BC} = (-6,-2) \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{40}$

Es escaleno porque todos los lados miden distinto

Ángulo entre AB y AC : 75º 57´ 49,52´´

Ángulo entre BA y BC : 63º 26´ 5,82´´

Ángulo entre CA y CB : 40º 36´ 4,66´´

Es acutángulo porque todos los ángulos son agudos