POLINOMIOS

4º E.S.O. Opción B

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Las combinaciones de números y letras relacionados entre sí por las operaciones aritméticas se llaman **expresiones algebraicas**.

$$2 \cdot x \cdot y + x \qquad \frac{2}{3} \cdot x \cdot y^2 \cdot z^3 - 2$$

Valor numérico de una expresión algebraica es el que se obtiene al sustituir en ella las letras por valores concretos y realizar las operaciones en la expresión algebraica.

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 4 \end{array}\right\} \rightarrow 3 \cdot x \cdot y^2 = 3 \cdot 2 \cdot 4^2 = 96$$

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Una expresión algebraica se llama **monomio** si en ella solo aparecen multiplicaciones y potencias de exponente natural.

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{coeficiente}} \cdot \pi \cdot \underbrace{r^2 \cdot h}_{\text{Parte literal}}$$

Dos **monomios** son semejantes si tienen la misma parte literal.

$25xy^2$ y $3xy^2$ son semejantes

$25x^2y$ y $3xy^2$ no son semejantes

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Grado de un **monomio** es la suma de todos los exponentes de las letras.

$3xy^2x^3 \longrightarrow$ Grado 6

$\frac{1}{2}r^2hx^3y \longrightarrow$ Grado 7

Un **polinomio** es la suma indicada de varios monomios no semejantes. El **grado del polinomio** es el mayor de los grados de los monomios que lo forman.

$25xy^2 + 2xy - y \rightarrow$ es un polinomio

$25xy^2 + 2xy - y \rightarrow$ es un polinomio de grado 3

SUMA Y RESTA DE POLINOMIOS

Suma y resta los polinomios: $P(x)=4x^4-2x^3+3x^2-2$ y $Q(x)=2x^4+x^3+4x-3$

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & 4x^4 & -2x^3 & +3x^2 & & -2 \\
+ & 2x^4 & +x^3 & & +4x & -3 \\
\hline
 & 6x^4 & -x^3 & +3x^2 & +4x & -5
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rrrrrr}
 & 4x^4 & -2x^3 & +3x^2 & & -2 \\
- & 2x^4 & +x^3 & & +4x & -3 \\
\hline
 & 2x^4 & -3x^3 & +3x^2 & -4x & +1
\end{array}
$$

$$(4x^4-2x^3+3x^2-2)+(2x^4+x^3+4x-3)=4x^4-2x^3+3x^2-2+2x^4+x^3+4x-3=$$
$$=6x^4-x^3+3x^2+4x-5$$

$$(4x^4-2x^3+3x^2-2)-(2x^4+x^3+4x-3)=4x^4-2x^3+3x^2-2-2x^4-x^3-4x+3=$$
$$=2x^4-3x^3+3x^2-4x+1$$

PRODUCTO DE POLINOMIOS

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & & 3x^2 & -5x & +10 \\
 & & & x^3 & & -4x \\
\hline
 & & & -12x^3 & +20x^2 & -40x \\
3x^5 & -5x^4 & +10x^3 & & & \\
\hline
3x^5 & -5x^4 & & -2x^3 & +20x^2 & -40x
\end{array}
$$

$$(2x^2-x)\cdot(3x^3-x^2-1)=2x^2\cdot(3x^3-x^2-1)-x(3x^3-x^2-1)=$$
$$=6x^5-2x^4-2x^2-3x^4+x^3+x=$$
$$=6x^5-5x^4+x^3-2x^2+x$$

POTENCIA DE UN POLINOMIO

Para elevar un polinomio a una potencia, debe multiplicarse por sí mismo tantas veces como indique el exponente.

$$(3x^4-x^2-2)^2=(3x^4-x^2-2)\cdot(3x^4-x^2-2)=$$
$$=3x^4\cdot(3x^4-x^2-2)-x^2\cdot(3x^4-x^2-2)-2\cdot(3x^4-x^2-2)=$$
$$=9x^8-3x^6-6x^4-3x^6+x^4+2x^2-6x^4+2x^2+4=$$
$$=9x^8-6x^6-11x^4+4x^2+4$$

IDENTIDADES NOTABLES

Cuadrado de una suma:	$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
Cuadrado de una diferencia:	$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
Suma por diferencia:	$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$
Cubo de una suma:	$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab^2 + 3a^2b$
Cubo de una suma:	$(a-b)^3 = a^3 - b^3 + 3ab^2 - 3a^2b$

Ejemplos:

a) $(8x+2y)^2=(8x)^2+(2y)^2+2\cdot 8x\cdot 2y=64x^2+4y^2+32xy$

b) $(5x-y)^2=(5x)^2+(y)^2-2\cdot 5x\cdot y=25x^2+y^2-10xy$

c) $(x-2z)^3=x^3-(2z)^3+3\cdot x\cdot(2z)^2-3\cdot x^2\cdot(2z)=x^3-8z^3+12xz^2-6x^2z$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Dividir el polinomio $3x^4 - 7x^3 \quad - 6x \;+ 7$ entre $3x^2 - x + 1$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & -7x^3 & & -6x & +7 & 3x^2 - x + 1 \leftarrow \boxed{\text{Divisor}} \\ \cline{6-6}
-3x^4 & +x^3 & -x^2 & & & x^2 - 2x - 1 \leftarrow \boxed{\text{Cociente}} \\ \cline{1-3}
 & -6x^3 & -x^2 & -6x & & \\
 & +6x^3 & -2x^2 & +2x & & \\ \cline{2-4}
 & & -3x^2 & -4x & +7 & \\
 & & +3x^2 & -x & +1 & \\ \cline{3-5}
 & & & -5x & +8 & \leftarrow \boxed{\text{Resto}}
\end{array}
$$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS POR RUFFINI

La **regla de Ruffini** es un método abreviado para efectuar las divisiones de polinomios entre binomios de la forma $x + a$ o $x - a$

Dividir el polinomio $3x^3 - 5x^2 \;- 8$ entre $x - 2$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 3 & -5 & 0 & -8 \\
2 & & 6 & 2 & 4 \\ \hline
 & \underbrace{3 \quad 1 \quad 2}_{\text{Cociente}} & & & \boxed{-4} \rightarrow \text{Resto}
\end{array}
$$

Cociente $3x^2 + x + 2$ y resto $- 4$

TEOREMA DEL RESTO

Teorema del resto. El resto de la división de un polinomio entre el binomio $x - a$ es igual al valor numérico del polinomio para $x = a$

Si dividimos el polinomio $3x^3 - 5x^2 \;- 8$ entre $x - 2$, y lo hacemos por Ruffini el resto es -4.

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 3 & -5 & 0 & -8 \\
2 & & 6 & 2 & 4 \\ \hline
 & 3 & 1 & 2 & \boxed{-4}
\end{array}
$$

Si hallamos el valor numérico del polinomio $3x^3 - 5x^2 \;- 8$ tomando como valor de $x = 2$, obtenemos -4.

$$3(2)^3 - 5(2)^2 \;- 8 = 24 - 20 - 8 = -4.$$

TEOREMA DEL FACTOR

Teorema del factor. Un polinomio $P(x)$ tiene como factor $x - a$ si el valor numérico de dicho polinomio para $x = a$ es 0.

Si dividimos el polinomio $3x^3 - 5x^2 \;- 4$ entre $x - 2$, y lo hacemos por Ruffini el resto es 0.

$$
\begin{array}{rc|cccc|l}
 & & 3 & -5 & 0 & -4 & \boxed{P(x) = 3x^3 - 5x^2 - 4} \\
 & & & & & & \text{Dividendo} \\
\text{Divisor} & \boxed{C(x) = x - 2} \;\; 2 & & 6 & 2 & 4 & \\ \hline
 & & 3 & 1 & 2 & \boxed{0} & \text{Resto} \\
 & & \multicolumn{3}{c}{\boxed{Q(x) = 3x^2 + x + 2}} & & \text{Cociente}
\end{array}
$$

Utilizando la propiedad del cociente de polinomios $P(x) = C(x) \cdot Q(x) + R$, al ser el resto $R = 0$ tenemos que $P(x) = C(x) \cdot Q(x)$, y por lo tanto:

$$3x^3 - 5x^2 \;- 4 = (3x^2 + x + 2)\cdot(x - 2), \text{ y } \quad x - 2 \text{ es un factor de } P(x).$$

RAÍZ DE UN POLINOMIO

Las raíces del polinomio $P(\mathrm{x})$ son las soluciones de la ecuación $P(\mathrm{x}) = 0$.

Ejemplo: Halla las raíces del polinomio $P(\mathrm{x}) = x^2 - 6x + 8$

Resolvemos la ecuación $x^2 - 6x + 8 = 0$.

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Las raíces de P(x) son los valores $x = 2$ y $x = 4$

RAÍZ DE UN POLINOMIO

Las raíces del polinomio $P(\mathrm{x})$ son las soluciones de la ecuación $P(\mathrm{x}) = 0$.

Ejemplo: Halla las raíces enteras del polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Como tiene grado tres, tendrá como mucho tres soluciones.

Las raíces serán divisores del 6: ±1, ±2, ±3, ±6

$P(-1) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) + 6 = 8 \neq 0$

$P(1) = 0$ $\quad$ $P(2) \neq 0$ $\quad$ $P(3) = 0$

$P(-2) = 0$ $\quad$ $P(-3) \neq 0$

Las raíces enteras de P(x) son los valores $x = 1$, $x = -2$ y $x = 3$

FACTORIZACIÓN DE UN POLINOMIO

Cada raíz de un polinomio $P(\mathrm{x})$ tiene asociado un factor del polinomio.

Ejemplo: Halla los factores del polinomio $P(\mathrm{x}) = x^2 - 6x + 8$

Hallamos las raíces resolviendo la ecuación $x^2 - 6x + 8 = 0$.

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = 4 \rightarrow (x-4)\ es\ el\ \ factor \\ x_2 = 2 \rightarrow (x-2)\ es\ el\ \ factor \end{cases}$$

Los factores de P(x) son $(x - 2)$ y $(x - 4)$

El polinomio P(x) factoriza como $x^2 - 6x + 8 = 1 \cdot (x - 2) \cdot (x - 4)$

TEMA 2: POLINOMIOS

2.1. Calcula el valor numérico pedido para las siguientes expresiones algebraicas.

a) $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + 4}$; $x = 2$

b) $g(a, b) = 3a^2 + 5ab$; $a = -1$, $b = 4$

c) $h(x, y) = x(y - 3) + xy^2$; $x = 2$, $y = 0$

2.2. Identifica los coeficientes y los grados parciales y total de los siguientes monomios.

a) $-3x^3yz^2$ **b)** ab^2c^4 **c)** $\frac{4x^2yz^2}{5}$ **d)** $-\frac{1}{2}p^4q^2r$

2.3. Escribe las expresiones algebraicas que corresponden al volumen de un cono y de una esfera.

2.4. Realiza las siguientes operaciones.

a) $(x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 2x) + (4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x)$

b) $(-2x^3 + x - 6) - (x^3 + 3x^2 + 2x - 7)$

2.5. Efectúa estos productos de polinomios.

a) $(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x - 2) \cdot (x^3 + 3)$

b) $(-5x^3 - 6x + 3) \cdot (x^2 - 2x + 1)$

c) $2x \cdot (5x^2 + 2x - 1) \cdot (-x^3 + 4)$

2.7. Dados los siguientes polinomios, efectúa las operaciones.

$P(x) = (3x^3 + 3x^2 - 1)$, $Q(x) = (2x^4 - 5x^2)$ y $R(x) = (-x^3 + x - 2)$

a) $P(x) - Q(x) + R(x)$ **b)** $P(x) + Q(x) \cdot R(x)$ **c)** $[Q(x)]^3$

2.8. Resuelve las siguientes operaciones.

a) $(m + 2n)^2$

b) $(-5 - 9b)^2$

c) $(2a - 3b)^2$

d) $\left(-4x + \frac{2}{3}y\right)^2$

e) $(-3x + y)^3$

f) $(4a + 5)^3$

2.9. Descompón en factores estas expresiones:

a) $y^2 - 16$

b) $9z^2 + 6zy + y^2$

c) $(3x + 2)^2 - (3x - 2)^2$

d) $27x^3 + 8 + 54x^2 + 36x$

2.10. Completa en tu cuaderno estas expresiones para que correspondan al cuadrado de un binomio.

a) $a^2 + 4ab + \square$

b) $x^2 + \frac{2}{3}xy + \square$

c) $4x^2 - \square + 9$

d) $\square - 6zyx^3 + 9z^2$

2.11. Utiliza la fórmula $a^2 - b^2 = (a + b)\cdot(a - b)$ para calcular las siguientes operaciones.

a) $15^2 - 5^2$

b) $55^2 - 45^2$

c) $125^2 - 25^2$

d) $700^2 - 300^2$

2.6. Calcula el cociente y el resto de la división y comprueba que D(x) = d(x) · C(x) + R(x).

$2x^5 + 7x^4 \qquad + x^2 - 4x + 1 \quad \underline{|\ x^2 + 3x - 2\ }$

2.7. Efectúa la operación:

$$Q(x) = (2x^4 - 5x^2) \text{ y } R(x) = (-x^3 + x - 2)$$

d) $Q(x) : R(x)$

2.41. Realiza las divisiones de polinomios:

a) $(6x^3 - 2x^2 - 1) : (x^2 + x + 2)$

b) $(-3x^4 + x^2 - 2x + 3) : (3x^2 - 2x + 1)$

c) $(x^6 - 2x^3 + 3x - 3) : (-2x^3 + x - 2)$

2.12. Realiza estas divisiones:

a) $(x^3 - 3x^2 + 5x - 10) : (x - 3)$

b) $(x^4 - 2x^2 + 6x + 7) : (x + 1)$

2.13. Utiliza la regla de Ruffini para hallar el número k que hay que añadir al polinomio $x^3 + 2x^2$ para que, al dividirlo entre $x + 4$, el resto sea 0.

2.17. Halla el resto de las divisiones sin efectuarlas.

a) $(x^{25} - 3x^2 - 4) : (x - 1)$

b) $(x^{33} - 1) : (x + 1)$

2.18. Indica, sin realizar las divisiones, si son ciertas:

a) $(x - 1)$ es un factor de $(x^5 + x^3 + 4x^2 + 6x + 2)$.

b) $(2x^4 - 4x^3 + x^2 - 3x + 2)$ es divisible entre $(x - 2)$.

2.19. Si se divide el polinomio $3x^3 - 2x^2 + kx + 1$ entre $x - 1$, el resto es 2. ¿Cuánto vale k?

2.20. Dado el polinomio $x^3 - 4x^2 - 5x + 8$:

a) ¿Cuántas raíces reales puede tener como máximo?

b) ¿Pueden ser $x = 1$ y $x = 3$ raíces del polinomio? Escribe el conjunto de todos los enteros que podrían ser raíz de este polinomio.

c) ¿Es $x = -2$ raíz del polinomio?

2.21. Indica cuáles de los siguientes números son raíces del polinomio $P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x + 3$.

$$0 \qquad 1 \qquad \frac{1}{2} \qquad 3 \qquad \frac{-1}{2}$$

2.22. Calcula las raíces enteras de estos polinomios.

a) $x^3 + 3x^2 - x - 3$

b) $x^3 - 2x^2 + 2x - 4$

2.25. Descompón en factores estos polinomios.

a) $x^3 - x^2 - 2x$

b) $x^3 + x^2 - 8x - 12$

c) $x^3 - x^2 + 5x - 5$

d) $x^3 + 2x^2 - 5x - 10$

2.26 Factoriza los siguientes polinomios.

a) $x^2 - 25$

b) $x^3 - x^5$

c) $x^3 - x$

d) $x^2 - x^4$