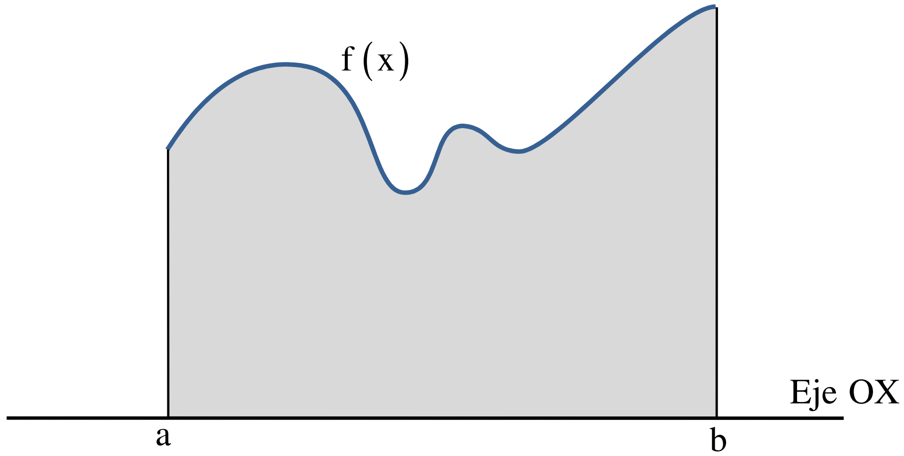
INTEGRALES DEFINIDAS

2º Bachillerato

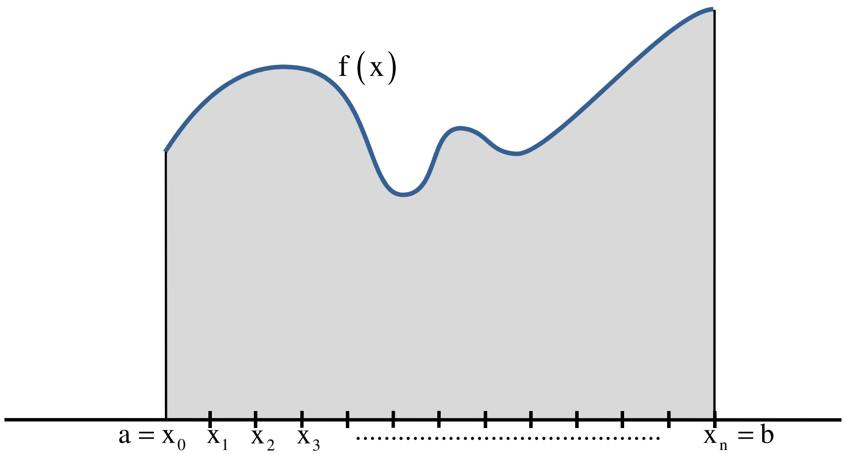
ÁREA BAJO UNA FUNCIÓN CONTINUA.

Sea la función $y = f(x)$ tal que $f(x) \geq 0$. Vamos a calcular el área bajo la curva, entre los puntos a y b.



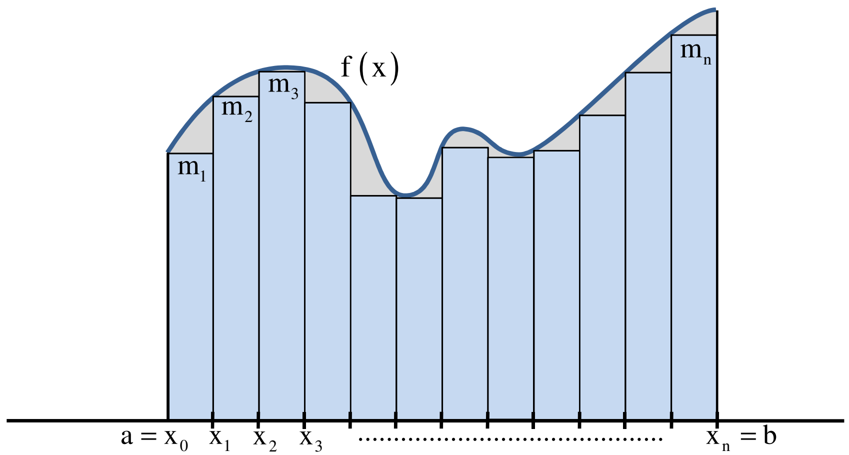
ÁREA BAJO UNA FUNCIÓN CONTINUA.

Se crea una partición del intervalo $[a , b]$ en n trozos que llamaremos $P_n[a , b]$.



ÁREA BAJO UNA FUNCIÓN CONTINUA.

Para la partición $P_n[a , b]$ tomamos los rectángulos de base $[x_{i-1} , x_i]$ y altura m_i que es el menor valor que toma $f(x)$ en cada intervalo.

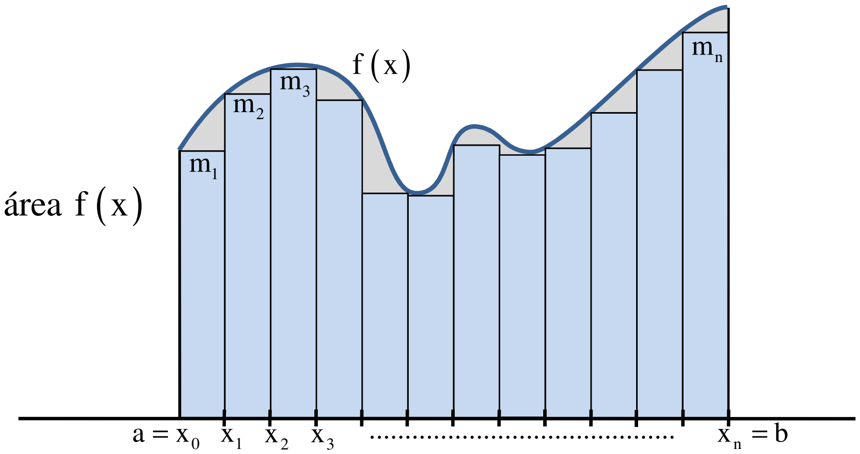


ÁREA BAJO UNA FUNCIÓN CONTINUA.

El área azul determinada por los rectángulos se llama **suma inferior**:

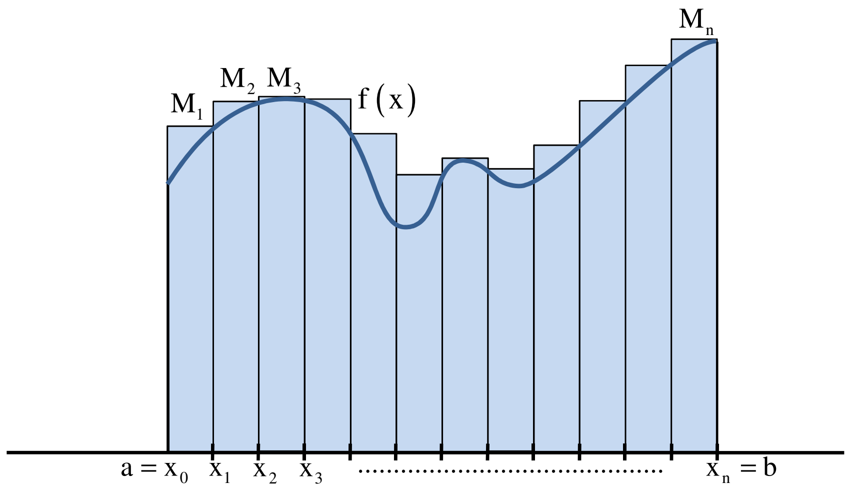
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i - x_{i-1}\right) = m_1\left(x_1 - x_0\right) + m_2\left(x_2 - x_1\right) + \ldots + m_n\left(x_n - x_{n-1}\right)$$

$s_n \le \text{área } f(x)$



ÁREA BAJO UNA FUNCIÓN CONTINUA.

Ahora tomamos los rectángulos de base $[x_{i-1}\ ,\ x_i]$ y altura M_i que es el mayor valor que toma f(x) en cada intervalo.

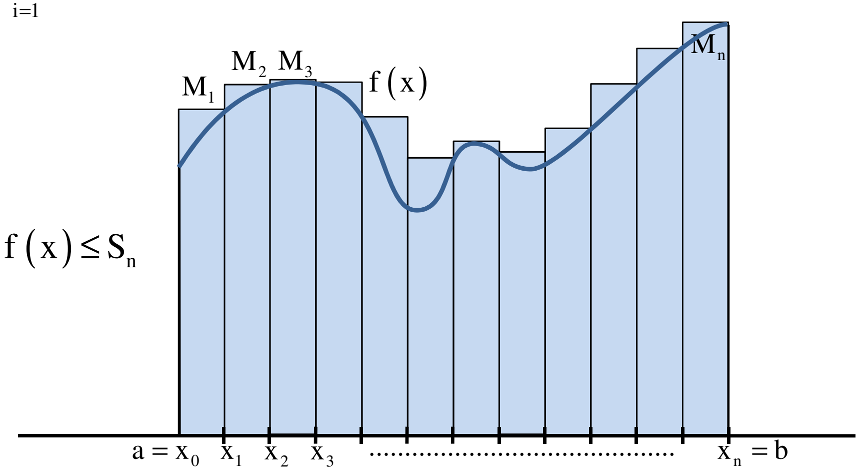


ÁREA BAJO UNA FUNCIÓN CONTINUA.

El área azul determinada por los rectángulos se llama **suma superior**:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\left(x_i - x_{i-1}\right) = M_1\left(x_1 - x_0\right) + M_2\left(x_2 - x_1\right) + \ldots + M_n\left(x_n - x_{n-1}\right)$$

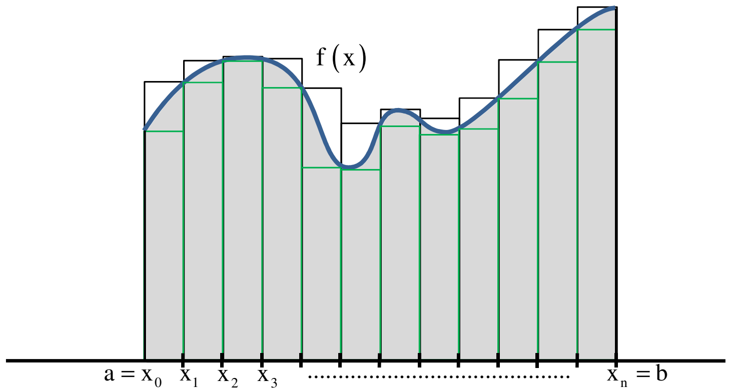
$\text{área } f(x) \le S_n$



ÁREA BAJO UNA FUNCIÓN CONTINUA.

El área bajo la curva f(x) está entre la suma inferior y la suma superior.

$$s_n \le \text{área } f(x) \le S_n$$



INTEGRAL DEFINIDA.

Sea la función y = f(x) tal que f(x) ≥ 0. Al área entre la curva, el eje OX y el intervalo [a , b] lo llamaremos integral definida de f entre a y b. Se representa como:

$$\int_a^b f \qquad \text{ó} \qquad \int_a^b f(x) \qquad \text{ó} \qquad \int_a^b f(x)\,dx$$

Por lo tanto podemos decir que:

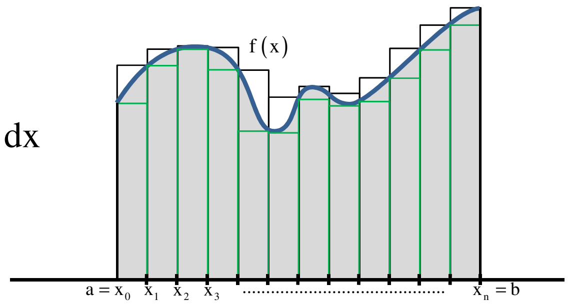
$$s_n \le \int_a^b f(x)\,dx \le S_n$$

INTEGRAL DEFINIDA.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i - x_{i-1}\right) \qquad\qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\left(x_i - x_{i-1}\right)$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n =$ Área bajo la curva

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx$$



PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA.

1) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2) Si f(x) > 0 y continua en [a , b], entonces $\int_a^b f(x)\,dx > 0$

3) Si f(x) < 0 y continua en [a , b], entonces $\int_a^b f(x)\,dx < 0$

4) Si a < b < c y f es continua en [a , c], entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA.

5) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f+g)(x)\,dx$

6) $\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int_a^b f(x)\,dx$

7) Si para cada x de [a , b] es f(x) ≤ g(x) $\quad \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

8) Si f es continua en (a , b) y existen $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \alpha$ y $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \beta$ formamos la función:

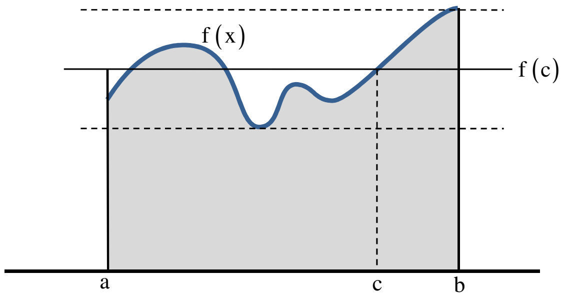
$$f_1(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x = a \\ f(x) & \text{si } a < x < b \\ \beta & \text{si } x = b \end{cases} \qquad \text{y definimos} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx$$

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA.

9) **Teorema del valor medio del cálculo integral.**

Si f es continua en [a , b] entonces existe un número c perteneciente al intervalo [a , b] tal que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$$

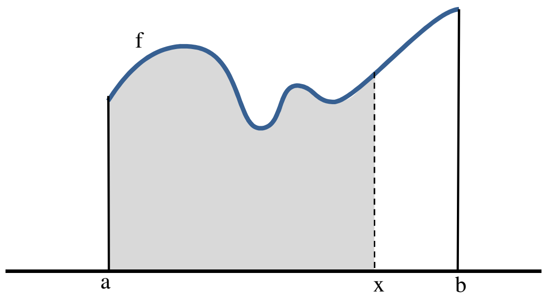


TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.

Función área.

Si f es continua en [a , b]. Consideremos la nueva función:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,\ x \in [a,b]$$



TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.

Teorema.

Si f es continua en [a , b], entonces la función:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,\ x \in [a,b]$$

es derivable y se verifica que

$$F'(x) = f(x)$$

y por lo tanto

$$\int f(x)\,dx = F(x) + k$$

REGLA DE BARROW.

Si f es continua en [a , b], y G(x) es una primitiva suya, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = \left[G(x)\right]_a^b$$

Ejemplos:

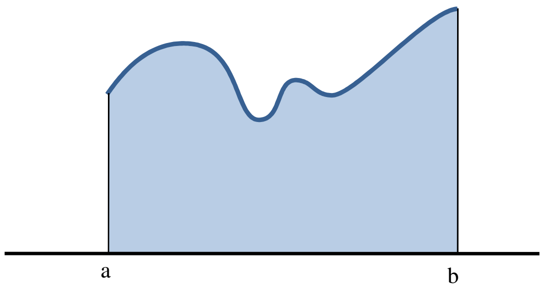
$$\int_1^3 2x\ dx = \left[x^2\right]_1^3 = 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8$$

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\ dx = \left[-\cos x\right]_0^\pi = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = 2$$

CÁLCULO DE ÁREAS MEDIANTE INTEGRALES.

Si f es continua en [a , b], y es positiva, el área es:

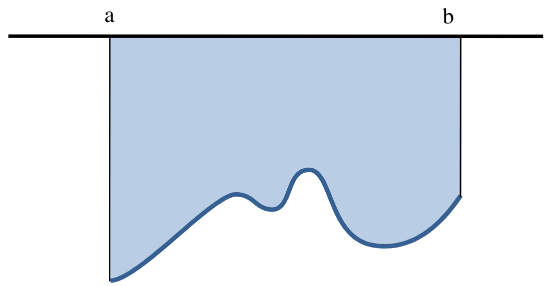
$$\text{Área} = \int_a^b f(x)\,dx$$



CÁLCULO DE ÁREAS MEDIANTE INTEGRALES.

Si f es continua en [a , b], y es negativa, el área es:

$$\text{Área} = -\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{ó} \quad \text{Área} = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

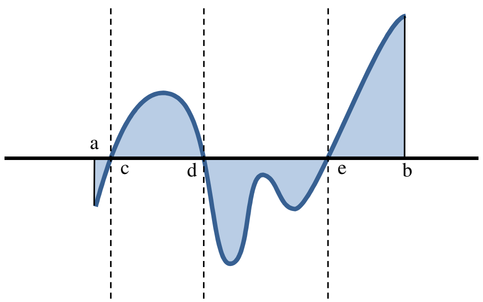


CÁLCULO DE ÁREAS MEDIANTE INTEGRALES.

Si f es continua en [a , b], y tiene un signo cualquiera el área se calcula:

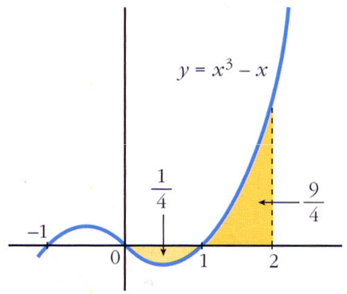
$$\text{Área} = -\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx - \int_d^e f(x)\,dx + \int_e^b f(x)\,dx$$

$$\text{Área} = \left|\int_a^c f(x)\,dx\right| + \left|\int_c^d f(x)\,dx\right| + \left|\int_d^e f(x)\,dx\right| + \left|\int_e^b f(x)\,dx\right|$$



CÁLCULO DE ÁREAS MEDIANTE INTEGRALES.

Hallar el área comprendida entre la función y = x^3 − x, el eje OX y las rectas x = 0 y x = 2.



$$x^3 - x = 0 \rightarrow x = -1, x = 0, x = 1$$

$$\text{Área} = \left|\int_0^1 (x^3 - x)\,dx\right| + \left|\int_1^2 (x^3 - x)\,dx\right|$$

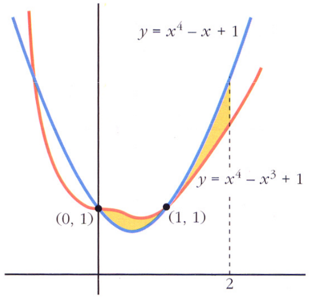
$$\int (x^3 - x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + k \rightarrow G(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$$

$$\text{Área} = \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2\right| = \left|-\frac{1}{4} - 0\right| + \left|2 - \left(-\frac{1}{4}\right)\right| = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}\,u^2$$

CÁLCULO DE ÁREAS ENTRE DOS CURVAS.

Si f y g son continuas en [a , b], el área entre f y g se calcula como el área delimitada por f – g.

Ejemplo: Hallar el área comprendida entre la función $f(x) = x^4 - x + 1$, la función $g(x) = x^4 - x^3 + 1$ y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.



$$(f-g)(x)=\left(x^4-x+1\right)-\left(x^4-x^3+1\right)=x^3-x$$

$$x^3-x=0 \to x=-1,\ x=0\ \text{y}\ x=1$$

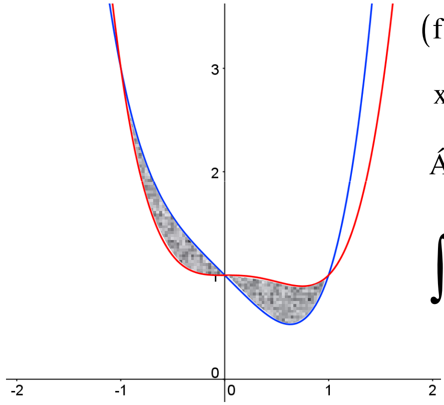
$$\text{Área}=\left|\int_0^1\left(x^3-x\right)dx\right|+\left|\int_1^2\left(x^3-x\right)dx\right|$$

$$\int\left(x^3-x\right)dx=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+k \to G(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}$$

$$\text{Área}=\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1\right|+\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_1^2\right|=\left|-\frac{1}{4}-0\right|+\left|2-\left(-\frac{1}{4}\right)\right|=\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}\ u^2$$

CÁLCULO DE ÁREAS ENTRE DOS CURVAS.

Hallar el área comprendida entre la función $f(x) = x^4 - x + 1$, la función $g(x) = x^4 - x^3 + 1$.



$$(f-g)(x)=\left(x^4-x+1\right)-\left(x^4-x^3+1\right)=x^3-x$$

$$x^3-x=0 \to x=-1,\ x=0\ \text{y}\ x=1$$

$$\text{Área}=\left|\int_{-1}^0\left(x^3-x\right)dx\right|+\left|\int_0^1\left(x^3-x\right)dx\right|$$

$$\int\left(x^3-x\right)dx=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+k \to G(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}$$

$$\text{Área}=\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0\right|+\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1\right|=\left|0-\left(-\frac{1}{4}\right)\right|+\left|\left(-\frac{1}{4}\right)-0\right|=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\ u^2$$