LÍMITES DE FUNCIONES

2º Bachillerato

CONCEPTO DE FUNCIÓN

f es una **función** de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ si a cada número real, $x \in \mathrm{Dom}(f)$ le hace corresponder un **<u>único</u>** número real, $f(x)$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Dom}(f) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) \end{array}$$

$\mathrm{Dom}(f)$ es el **dominio de definición** de la función.

Recorrido de f es el conjunto de todos los valores reales que son imagen de algún valor del dominio.

FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

Para obtener el dominio de una función, es conveniente recordar que:

Tipo de función	Expresión	Dominio
Polinómicas	$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$	$D(f) = \mathbf{R}$
Racionales	$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$D(f) = \mathbf{R} - \{x \,/\, Q(x) = 0\}$
Irracionales	$f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$	$D(f) = \mathbf{R} - \{x \,/\, g(x) < 0\}$, si n par $D(f) = \mathbf{R}$, si n impar
Exponenciales	$f(x) = a^x,\ a > 0$	$D(f) = \mathbf{R}$
Logarítmicas	$f(x) = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0$	$D(f) = \mathbf{R}^+$
Trigonométricas	$f(x) = \text{sen } x;\ f(x) = \cos x$ $f(x) = \text{tg } x$	$D(f) = \mathbf{R}$ (rad) $D(f) = \mathbf{R} - \left\{x_k = \dfrac{\pi}{2} \pm k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Sea $f(x) = 2x + 3$. Vamos a darle valores a x cercanos a 1 y vamos a ver cómo se comporta $f(x)$.

$x \to 1^-$	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	…	$\longrightarrow 1$
$f(x)$	4.8	4.98	4.998	4.9998	4.99998	…	$\longrightarrow 5$

Cuando $x \to 1^-$ (por la izquierda) se cumple que $f(x) \to 5$.

$x \to 1^+$	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001	…	$\longrightarrow 1$
$f(x)$	5.2	5.02	5.002	5.0002	5.00002	…	$\longrightarrow 5$

Cuando $x \to 1^+$ (por la derecha) se cumple que $f(x) \to 5$.

Por lo tanto cuando $x \to 1$ se cumple que $f(x) \to 5$.

CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Una función f(x) tiene por **límite** L en el punto x_0, si a medida que x se acerca a x_0, se verifica que las imágenes se aproximan a L. Se expresa:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Si los valores que tomamos cercanos a x_0 son menores que x_0 estamos calculando el **límite lateral por la izquierda** y se representa:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

Si los valores que tomamos cercanos a x_0 son mayores que x_0 estamos calculando el **límite lateral por la derecha** y se representa:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Calcula $\lim_{x \to 2} \frac{6x}{x-5}$

$x \to 2^-$	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	…	$\longrightarrow 2$
f(x)	–3.67741	–3.96677	–3.99666	–3.99966	–3.99996	…	$\longrightarrow -4$

$x \to 2^+$	2.1	2.01	2.001	2.0001	2.00001	…	$\longrightarrow 2$
f(x)	–4.34482	–4.03448	–4.00333	–4.00033	–4.00003	…	$\longrightarrow -4$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 2^-} \frac{6x}{x-5} = -4 \\ \lim_{x \to 2^+} \frac{6x}{x-5} = -4 \end{array}\right\} \to \lim_{x \to 2} \frac{6x}{x-5} = -4$$

LÍMITE INFINITO DE UNA FUNCIÓN

Calcula $\lim_{x \to 2} \frac{x}{x-2}$

$x \to 2^-$	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	…	$\longrightarrow 2$
f(x)	–19	–199	–1999	–19999	–199999	…	$\longrightarrow -\infty$

$x \to 2^+$	2.1	2.01	2.001	2.0001	2.00001	…	$\longrightarrow 2$
f(x)	21	201	2001	20001	200001	…	$\longrightarrow +\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 2^-} \frac{x}{x-2} = -\infty \\ \lim_{x \to 2^+} \frac{x}{x-2} = +\infty \end{array}\right\} \to \nexists \lim_{x \to 2} \frac{x}{x-2}$$

LÍMITE INFINITO DE UNA FUNCIÓN

Calcula $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$

$x \to 0^-$	–0.1	–0.01	–0.001	–0.0001	…	$\longrightarrow 0$
f(x)	100	10000	1000000	100000000	…	$\longrightarrow +\infty$

$x \to 0^+$	0.1	0.01	0.001	0.0001	…	$\longrightarrow 0$
f(x)	100	10000	1000000	100000000	…	$\longrightarrow +\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x^2} = +\infty \end{array}\right\} \to \lim_{x \to 2} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN EL INFINITO

Calcula $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$

$x\to+\infty$	100	1000	10000	100000	…	$\longrightarrow +\infty$
f(x)	0.01	0.001	0.0001	0.00001	…	$\longrightarrow 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

- Si una función tiene límite en un punto, éste es **único**.

- Si una función tiene límites laterales distintos en un punto, entonces no tiene límite en ese punto.

- Si f y g tienen límites en x_0 y k es un número se verifica que:

$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$	$\lim_{x\to x_0} k\cdot f(x) = k\cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$
$\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$	$\lim_{x\to x_0}(f\circ g)(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)$
$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$ si $\lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$	$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim_{x\to x_0} g(x)}$

CÁLCULO DE LÍMITES DE FUNCIONES

$$\lim_{x\to 2}\frac{6x}{x-5} = -4 \qquad f(2) = -4$$

Si existe la imagen de la función no definida a trozos en el punto en el que queremos calcular el límite, dicho límite será igual a la imagen por la función en el punto.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x}{x+2} = \frac{3}{5} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x^2-5} = 0$$

$$\lim_{x\to -2} 3x^2 - 2 = 10 \qquad \lim_{x\to 5} 2^{x-3} = 4$$

CÁLCULO DE LÍMITES EN EL ∞ DE FUNCIONES

$$\lim_{x\to+\infty} 2x+5$$

Tabla de ayuda para realizar límites en el infinito ($k > 0$):

$+\infty + \infty = +\infty$	$(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$	$k^{+\infty} = +\infty \quad k>1$
$-\infty - \infty = -\infty$	$(+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$	$k^{+\infty} = 0 \quad k<1$
$\pm k + \infty = +\infty$	$(-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$	$(+\infty)^{k} = +\infty$
$\pm k - \infty = -\infty$	$(-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$	$(+\infty)^{-k} = 0$
$k\cdot(+\infty) = +\infty$	$\frac{\pm k}{\pm\infty} = 0$	$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$
$k\cdot(-\infty) = -\infty$		$(+\infty)^{-\infty} = 0$
$(-k)\cdot(+\infty) = -\infty$		
$(-k)\cdot(-\infty) = +\infty$		

CÁLCULO DE LÍMITES EN EL ∞ DE FUNCIONES

$$\lim_{x\to+\infty} 2x+5=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} 3^{x^2-1}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+5}{-3}=-\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^3+x=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x^2-1}=0 \qquad \lim_{x\to-\infty} 2^{\frac{1}{x-5}}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2-2x=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} (1-x)^x=0$$

EXPRESIONES INDETERMINADAS

Calcula $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1}$

Si se sustituye aparece una expresión sin sentido del tipo $\frac{0}{0}$

Cuando al sustituir en una función para calcular el límite, el resultado no es un número real, surgen las **expresiones indeterminadas** o **indeterminaciones**.

Las indeterminaciones son $\frac{k}{0},\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},0\cdot\infty,\infty-\infty,1^{\infty},\infty^{0}$ y 0^{0}

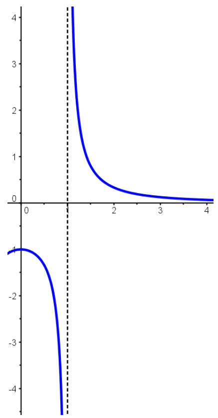
EXPRESIONES INDETERMINADAS

Indeterminación del tipo $\frac{k}{0}$

Calcula $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}$

Se hacen los límites laterales $\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1}{x^2-1}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{x^2-1}=+\infty\end{array}\right\}$

Por lo tanto $\nexists \lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}$



EXPRESIONES INDETERMINADAS

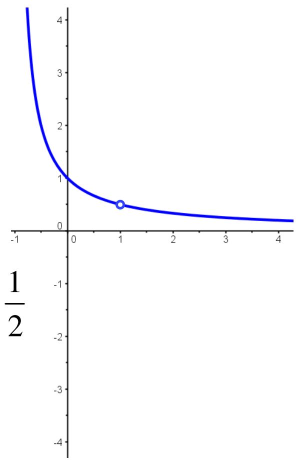
Indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$

Calcula $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1}$

Se simplifica:

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1}\overset{\frac{0}{0}}{\uparrow}{=}\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{(x+1)}=\frac{1}{2}$$

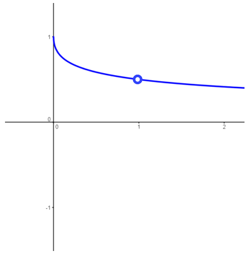
¡¡¡Cuidado!!! $\cancel{\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{(x+1)}=\frac{1}{2}}$



EXPRESIONES INDETERMINADAS

Indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$

Calcula $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$



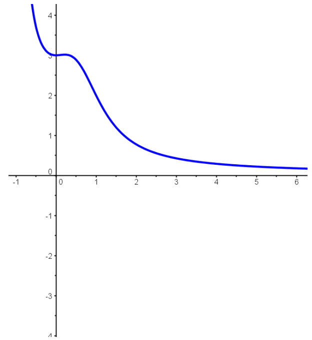
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\uparrow}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

EXPRESIONES INDETERMINADAS

Indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Calcula $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+3}{x^3+1}$



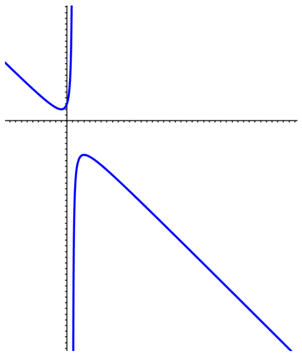
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+3}{x^3+1}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{\uparrow}{=}}\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{x^2+3}{x^3}}{\frac{x^3+1}{x^3}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{x^2}{x^3}+\frac{3}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}}=0$$

EXPRESIONES INDETERMINADAS

Indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Calcula $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+3}{-x+1}$



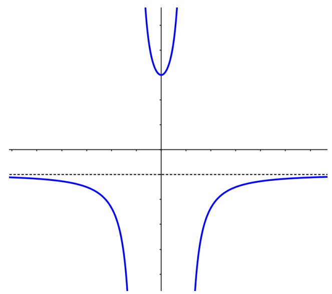
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+3}{-x+1}\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{\underset{\uparrow}{=}}\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{x^2+3}{x^2}}{\frac{-x+1}{x^2}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{-x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{1+\frac{3}{x^2}}{\frac{-1}{x}+\frac{1}{x^2}}\overset{\frac{1}{0}}{\underset{\uparrow}{=}}-\infty$$

EXPRESIONES INDETERMINADAS

Indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Calcula $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+3}{-x^2+1}$



$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+3}{-x^2+1}\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{\underset{\uparrow}{=}}\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{x^2+3}{x^2}}{\frac{-x^2+1}{x^2}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{-x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{1+\frac{3}{x^2}}{-1+\frac{1}{x^2}}=-1$$

EXPRESIONES INDETERMINADAS

Indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. REGLA

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{x^3+1}=0$$ Grado mayor Denominador = 0

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{-x+1}=-\infty$$ Grado mayor Numerador = $\pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{-x^2+1}=-1$$ Grado igual = Cociente coeficientes mayor grado

EXPRESIONES INDETERMINADAS

Indeterminación del tipo $\infty-\infty$

Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-x$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-x\overset{\infty-\infty}{\overset{\uparrow}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+x\right)}{\sqrt{x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-x^2}{\sqrt{x+1}+x}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\overset{\uparrow}{=}}-\infty$$

EXPRESIONES INDETERMINADAS

Indeterminación del tipo 1^∞

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+5}{x+2}\right)^{x-1}\overset{1^\infty}{\overset{\uparrow}{=}}\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x+5}{x+2}-1\right)^{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x+5-(x+2)}{x+2}\right)^{x-1}=$$

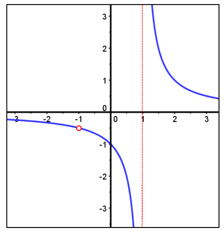
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x+2}\right)^{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x+2}{3}}\right)^{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x+2}{3}}\right)^{\frac{x+2}{3}}\right)^{\frac{3}{x+2}\cdot(x-1)}=$$

$$=\left(\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x+2}{3}}\right)^{\frac{x+2}{3}}\right)^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-3}{x+2}}=e^3$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e}\qquad\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)}=e}$$

$$\boxed{\lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)}=e}$$

ASÍNTOTAS



Asíntota vertical.

Una función tiene una asíntota vertical en x = a si:

$$\lim_{x\to a}f(x)=\pm\infty$$

Ejemplo.

Hallar las asíntotas verticales de la función $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$

$$x^2-1=0\to\begin{cases}x=-1\to\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\cancel{x+1}}{\cancel{(x+1)}(x-1)}=-\dfrac{1}{2}\to\text{NO A.V.}\\[2ex] x=1\to\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{x^2-1}\to\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x+1}{x^2-1}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x+1}{x^2-1}=+\infty\end{cases}\to\text{A.V. en } x=1\end{cases}$$

$\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

ASÍNTOTAS

Asíntota horizontal.

Una función tiene una asíntota horizontal y = b si se cumple:

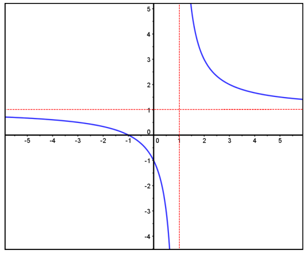
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$$

Ejemplo.

Hallar las asíntotas horizontales de la función $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=1 \to \text{A.H. } y=1 \text{ en } -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=1 \to \text{A.H. } y=1 \text{ en } +\infty\end{array}\right\}$$

$\to y=1$ es A.H. por los dos lados.



ASÍNTOTAS

Asíntota oblicua.

Una función tiene una asíntota oblicua y = mx + n si se cumple:

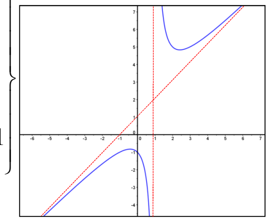
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = m \neq 0 \qquad\qquad n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-mx\right)$$

Ejemplo.

Hallar las asíntotas oblicuas de la función $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$

$$\left.\begin{array}{l} m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\left(\dfrac{x^2+1}{x-1}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+1}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2-x}=1 \\ n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+1-(x^2-x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1+x}{x-1}=1\end{array}\right\}$$

$\to y=x+1$ es A.O. por los dos lados



ASÍNTOTAS

Hallar las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

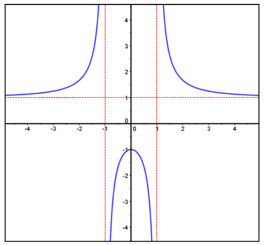
A.V.

$$x^2-1=0\to\left\{\begin{array}{l} x=-1\to\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\to\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=-\infty\end{array}\right. \to \text{A.V. en } x=-1 \\ x=1\to\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\to\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=+\infty\end{array}\right. \to \text{A.V. en } x=1\end{array}\right.$$

A.H.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=1\to \text{A.H. } y=1 \text{ en } -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=1\to \text{A.H. } y=1 \text{ en } +\infty\end{array}\right\}\to\left\{\begin{array}{l} y=1 \text{ es A.H.} \\ \text{por los dos lados}\end{array}\right.$$

A.O. No tiene por tener horizontal por los dos lados.



CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Una función f(x) es **continua** en x = a si cumple que:

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Se tiene que cumplir que:

$$1^{\circ})\ \exists \lim_{x\to a} f(x)$$

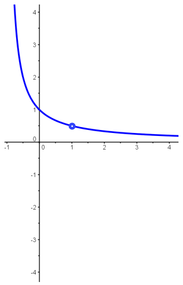
$$2^{\circ})\ \exists f(a)$$

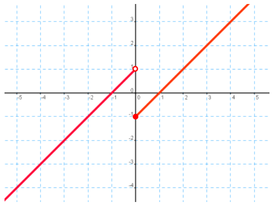
$$3^{\circ})\ \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

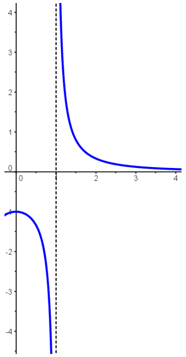
Si no se cumple alguna de las condiciones se dice que f es discontinua en x = a.

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Tipos de discontinuidades:



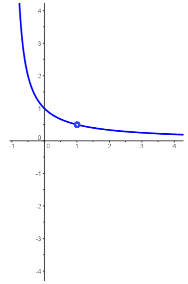




Evitable. De salto finito De salto infinito

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Tipos de discontinuidades:



Evitable. $\exists \lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$

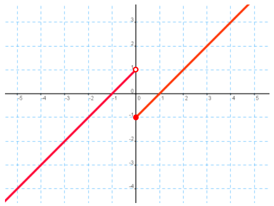
Ejemplo: $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ en $x=1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}\overset{\frac{0}{0}}{\uparrow}{=}\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{(x+1)}=\dfrac{1}{2}\\ \nexists f(1)\end{array}\right\}\to \exists \lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}\neq f(1)$$

f es discontinua evitable en x = 1.

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Tipos de discontinuidades:



De salto finito $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$

Ejemplo: $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x<0 \\ x-1 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$ en $x=0$

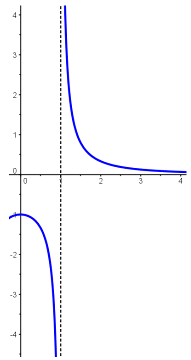
$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+1)=1\\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x-1)=-1\end{array}\right\}\to \lim_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

f es discontinua de salto finito en x = 0 y el salto es igual a 2.

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Tipos de discontinuidades:

De salto infinito $\lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$ o $\lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$



Ejemplo: $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ en $x=1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x^2-1}=-\infty\\ \lim_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x^2-1}=+\infty\end{array}\right\}\to \text{Por lo tanto } \nexists \lim_{x\to 1}\dfrac{1}{x^2-1}$$

f es discontinua de salto infinito en x = 1.

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Estudia la continuidad de: $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$

$\boxed{\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{-1,1\}}$

$\boxed{x=-1}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x-1}{x^2-1}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x-1}{x^2-1}=+\infty\end{array}\right\}\to \text{ f es discontinua de salto infinito en } x=-1.$$

$\boxed{x=1}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^2-1}\overset{\frac{0}{0}}{\uparrow}{=}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{(x+1)}=\dfrac{1}{2}\\ \nexists f(1)\end{array}\right\}\to$$

f es discontinua evitable en x = 1.

f es continua en $\mathbb{R}-\{-1,1\}$

CONTINUIDAD EN UN INTERVALO

Una función se dice que es continua en un intervalo de los números reales si es continua en cada punto del intervalo.

$$f(x)=\frac{1}{x^2-1}$$

f es continua en $\mathbb{R}-\{-1,1\}$

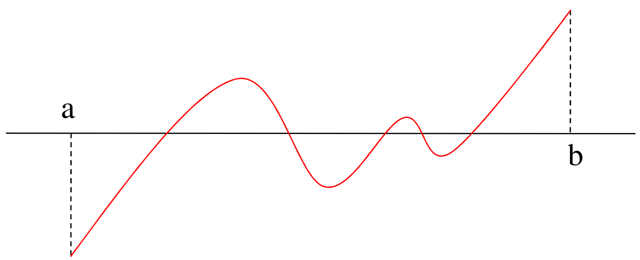
f(x) es continua en el intervalo [2 , 3] porque es continua en todos los punto de dicho intervalo.

f(x) no es continua en el intervalo [0 , 2] por no ser continua en el punto x = 1 que pertenece a dicho intervalo.

CONTINUIDAD EN UN INTERVALO

Teorema de Bolzano

Si f(x) es continua en el intervalo [a , b] y se cumple que signo de f(a) ≠ signo de f(b), entonces existe c ϵ]a , b[tal que f(c) = 0.



CONTINUIDAD EN UN INTERVALO

Teorema de Bolzano

Probar que la ecuación $x^3 - 3x + 40 = 0$, tiene alguna raíz real.

$f(x)=x^3-3x+40$ Continua por ser polinómica.

$f(-4)=-12$ $f(-3)=22$

f continua en [–4 , –3] y signo f(–4) ≠ signo f(–3). Por tanto, por el teorema de Bolzano, $\exists c\in\,]-4,-3[$ tal que $f(c)=0$

La raíz de la ecuación es c.

Tanteando se puede comprobar que:

$f(-3'8)=-3'472$ $f(-3'7)=0'447$

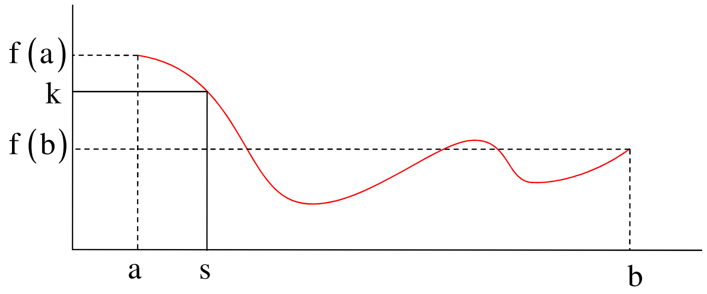
Una aproximación de la raíz a las décimas es –3’7.

CONSECUENCIAS TEOREMA BOLZANO

Teorema de los valores intermedios.

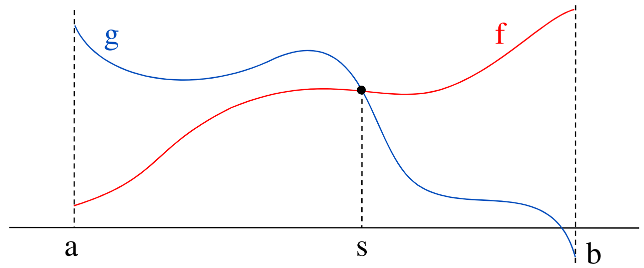
Si f(x) es continua en el intervalo [a , b] entonces se cumple que f toma todos los valores intermedios entre f(a) y f(b).

$$\forall k \in \mathbb{R}, f(a) < k < f(b) \rightarrow \exists s \in \mathbb{R} \text{ , } a < s < b \text{ , } f(s) = k$$



CONSECUENCIAS TEOREMA BOLZANO

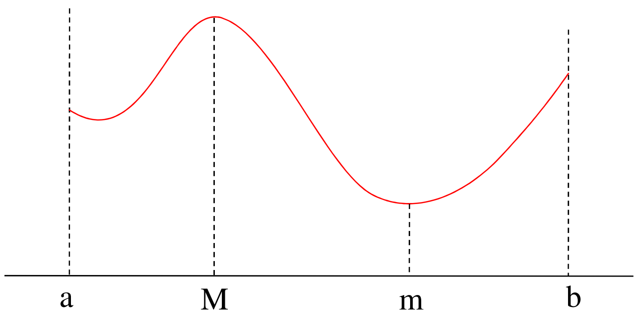
Si f y g son continuas en el intervalo [a , b] y f(a)<g(a) y f(b)>g(b), entonces existe un valor s entre a y b que cumple que f(s) = g(s)



CONSECUENCIAS TEOREMA BOLZANO

Teorema de Weierstrass.

Si f(x) es continua en el intervalo [a , b] entonces se cumple que f tiene un máximo y un mínimo absolutos en [a , b].



CONSECUENCIAS TEOREMA BOLZANO

Probar que las gráficas de las funciones f(x) = ln x y g(x) = e^{-x} se cortan en algún punto.

$f(1) = \ln 1 = 0$ $\qquad$ $g(1) = e^{-1} \approx 0'37$

$f(2) = \ln 2 \approx 0'69$ $\qquad$ $g(2) = e^{-2} \approx 0'69$

$f(1) < g(1)$ $\qquad$ $f(2) > g(2)$

Como f y g son continuas en el intervalo [1 , 2], podemos asegurar por las consecuencias del teorema de Bolzano que f y g se cortan en algún punto del intervalo]1 , 2[.