SISTEMAS DE ECUACIONES 2º Bachillerato

EXPRESIÓN MATRICIAL DE UN SISTEMA.

Notación ordinaria

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas se puede escribir del siguiente modo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

donde tanto los **coeficientes** del sistema, a_{ij}, como los **términos independientes** del mismo, b_i, son números reales dados y $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ son las **incógnitas del sistema**.

Si todos los términos independientes son nulos, el sistema se llama **homogéneo**.

EXPRESIÓN MATRICIAL DE UN SISTEMA.

Notación matricial

El sistema se escribe en forma matricial de la siguiente manera:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B}$$

A es la **matriz** de dimensión $m \times n$ de **coeficientes del sistema**; X es la matriz columna formada por las **incógnitas**; y B es la matriz columna de los **términos independientes**. El sistema se puede escribir en forma matricial abreviada como:

$$AX = B$$

SOLUCIONES DE UN SISTEMA.

Sea el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

Una **solución** del sistema lineal es cualquier conjunto de números reales $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ tales que, al sustituir las incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ por $s_1, s_2, \dots, s_n$, respectivamente, se satisfacen a la vez las m ecuaciones.

Según el número de soluciones que poseen, los sistemas se clasifican en:

- **Incompatibles:** cuando no tienen ninguna solución. $\longrightarrow$ S.I.
- **Compatibles:** cuando tienen solución. A su vez estos pueden ser:
  - **Compatibles determinados**, si la solución es única. $\longrightarrow$ S.C.D.
  - **Compatibles indeterminados**, si tienen más de una solución. $\longrightarrow$ S.C.I.

SOLUCIONES DE UN SISTEMA.

Sistemas equivalentes. Propiedades

Dos sistemas de ecuaciones lineales son **equivalentes** cuando tienen las mismas soluciones.

Las siguientes propiedades determinan sistemas equivalentes a uno dado:

1.ª Si se multiplican los dos miembros de una ecuación de un sistema por un número real distinto de cero, resulta otro sistema equivalente al dado.

2.ª Si a una ecuación de un sistema se le suma otra ecuación del mismo, resulta otro sistema equivalente al dado.

Ejemplo: Determina si son equivalentes los siguiente sistemas:

$$\begin{cases} 2x + 6y = 4 \\ x - 3y = 6 \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} 2x + 6y = 4 \\ 2x - 6y = 12 \end{cases}$$

Son equivalentes, ya que el segundo sistema se obtiene al multiplicar por 2 la segunda ecuación del primer sistema (propiedad 1).

MÉTODO DE GAUSS. SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO.

$$\begin{cases} x-3y+4z=2 \\ 2x-\ \ y+3z=4 \\ 3x+\ \ y-\ \ z=3 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 10 & -13 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x-\ 3y+\ 4z=2 & \rightarrow x=1 \\ \quad 5y-\ 5z=0 & \rightarrow y=1 \\ \qquad -\ 3z=-3 & \rightarrow z=1 \end{cases}$$

MÉTODO DE GAUSS. SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO.

$$\begin{cases} x-3y+4z=21 \\ 3x+\ \ y-\ \ z=-18 \\ 2x-\ \ y+3z=12 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 21 \\ 3 & 1 & -1 & -18 \\ 2 & -1 & 3 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 21 \\ 0 & 10 & -13 & -81 \\ 0 & 5 & -5 & -30 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 21 \\ 0 & 0 & -3 & -21 \\ 0 & 5 & -5 & -30 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x-3y+4z=21 & \rightarrow x=-4 \\ \qquad -3z=-21 & \rightarrow z=7 \\ \quad y-\ z=-6 & \rightarrow y=1 \end{cases}$$

MÉTODO DE GAUSS. SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO.

$$\begin{cases} x-2y+\ \ z=3 \\ 2x\qquad -\ \ z=9 \\ 3x+\ \ y-2z=13 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 9 \\ 3 & 1 & -2 & 13 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 & 29 \\ 2 & 0 & -1 & 9 \\ 3 & 1 & -2 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 9 \\ 3 & 1 & -2 & 13 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x \qquad\qquad =2 & \rightarrow x=2 \\ 2x \qquad -\ z=9 & \rightarrow z=-5 \\ 3x+\ y-2z=13 & \rightarrow y=-3 \end{cases}$$

MÉTODO DE GAUSS. SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO.

$$\begin{cases} 5x+2y-3z=-1 \\ 2x+3y-4z=-6 \\ 6x-4y+\ \ z=8 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & -6 \\ 6 & -4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 23 & -10 & 0 & 23 \\ 26 & -13 & 0 & 26 \\ 6 & -4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 23 & -10 & 0 & 23 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 6 & -4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 6 & -4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3x \qquad\qquad\ \ =3 & \rightarrow\ x=1 \\ 2x-\ \ y \qquad =2 & \rightarrow\ y=0 \\ 6x-4y+\ \ z=8 & \rightarrow\ x=2 \end{cases}$$

MÉTODO DE GAUSS. SISTEMA INCOMPATIBLE.

$$\begin{cases} x-3y+4z=2 \\ 3x+\ \ y-\ \ z=3 \\ 4x-2y+3z=4 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 10 & -13 & -3 \\ 0 & 10 & -13 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 10 & -13 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x-\ \ 3y+\ \ 4z=2 \\ \qquad 10y-13z=-3 \\ \qquad\qquad \cancel{0=-2} \end{cases}$$

El sistema no tiene solución ya que
la ecuación 0 = –2 no tiene sentido

MÉTODO DE GAUSS. SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO.

$$\begin{cases} x-3y+4z=2 \\ 3x+\ \ y-\ \ z=3 \\ 4x-2y+3z=5 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 10 & -13 & -3 \\ 0 & 10 & -13 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 10 & -13 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x-\ \ 3y+\ \ 4z=2 \\ \qquad 10y-13z=-3 \end{cases} \xrightarrow{z=\lambda} \begin{cases} x-\ \ 3y+\ \ 4\lambda=2 \\ \qquad 10y-13\lambda=-3 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x-\ \ 3y=2-4\lambda \quad \rightarrow x=2-4\lambda+3\left(\dfrac{-3+13\lambda}{10}\right) \rightarrow x=\dfrac{20-40\lambda}{10}+\dfrac{-9+39\lambda}{10} \rightarrow \boxed{x=\dfrac{11-\lambda}{10}} \\ 10y=-3+13\lambda \rightarrow \boxed{y=\dfrac{-3+13\lambda}{10}} \end{cases}$$

MÉTODO DE GAUSS. SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO.

$$\begin{cases} x-3y+4z=2 \\ 3x+\ \ y-\ \ z=3 \\ 4x-2y+3z=5 \end{cases} \qquad \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{11-\lambda}{10} \\ y=\dfrac{-3+13\lambda}{10} \\ z=\lambda \end{array}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

Si λ= 1 tenemos que x = 1 ; y = 1 ; z = 1

Si λ= 0 tenemos que x = 11/10 ; y = −3/10 ; z = 0

………

Infinitas soluciones

MÉTODO DE GAUSS. DISCUSIÓN DE UN SISTEMA.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & a & b \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{Si } \ a \neq 0 \rightarrow \text{S.C.D.} \\ \text{Si } \ a = 0 \rightarrow \begin{cases} \text{Si } \ b \neq 0 \rightarrow \text{S.I.} \\ \text{Si } \ b = 0 \rightarrow \text{S.C.I.} \end{cases} \end{cases}$$

MÉTODO DE EXPRESIÓN MATRICIAL DE UN SISTEMA.

Se considera el sistema de n ecuaciones lineales y n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

que, en forma matricial, se escribe $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = B$

Si la matriz A es regular, entonces existe la matriz inversa A^{-1}. Multiplicando por la izquierda por A^{-1} los dos miembros de la igualdad anterior, se obtiene

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow \boldsymbol{X = A^{-1}B}$$

MÉTODO DE EXPRESIÓN MATRICIAL DE UN SISTEMA.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + y - y = 2 \end{cases} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \Rightarrow \text{existe la matriz } A^{-1}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{Adj }(A) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow (\text{Adj }(A))^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 5 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \text{ de donde resulta:}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 5 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

SISTEMA DE CRAMER. REGLA DE CRAMER.

Un sistema de ecuaciones lineales es un **sistema de Cramer** si cumple las siguientes condiciones:

a) Tiene n ecuaciones y n incógnitas.

b) El determinante de la matriz de los coeficientes del sistema es distinto de cero.

Los sistemas de Cramer son siempre **compatibles** y **determinados**, es decir, tienen solución única.

En efecto, sea A la matriz de coeficientes del sistema que se supone de orden n. Como $|A| \neq 0$, entonces A es inversible y la solución del sistema sería $X = A^{-1}B$.

SISTEMA DE CRAMER. REGLA DE CRAMER.

Sea S un sistema de Cramer. Sea A la matriz de coeficientes que expresaremos como A = (C_1, C_2, C_3, …, C_n), y B la matriz de términos independientes. Entonces el valor de las incógnitas es:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\det(B, C_2, C_3, \dots, C_n)}{\det(C_1, C_2, C_3, \dots, C_n)}$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\det(C_1, B, C_3, \dots, C_n)}{\det(C_1, C_2, C_3, \dots, C_n)}$$

$$\dots$$

$$x_n = \frac{|A_n|}{|A|} = \frac{\det(C_1, C_2, C_3, \dots, B)}{\det(C_1, C_2, C_3, \dots, C_n)}$$

El valor de cada incógnita se obtiene dividiendo su determinante asociado por el determinante de la matriz de coeficientes del sistema.

SISTEMA DE CRAMER. REGLA DE CRAMER.

$$\begin{cases} -3x + y + 2z = 1 \\ x + 5y - z = 4 \\ -4x - 2y + 3z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \\ -4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$$x = \frac{\det(B, C_2, C_3)}{\det(C_1, C_2, C_3)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$y = \frac{\det(C_1, B, C_3)}{\det(C_1, C_2, C_3)} = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -4 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$z = \frac{\det(C_1, C_2, B)}{\det(C_1, C_2, C_3)} = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \\ -4 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

La solución del sistema es: $x = 2$; $y = 1$; $z = 3$

COMPATIBILIDAD. TEOREMA DE ROUCHÉ-FRÖBENIUS.

Un sistema es **compatible** si el rango de la matriz de los coeficientes de las incógnitas, A, es igual al rango de la matriz ampliada con la columna de los términos independientes, A^*, y recíprocamente.

Sistema compatible $\Leftrightarrow$ rg(A) = rg(A^*)

<table>
<tr><td rowspan="2">rg(A) = rg(A*)
Sistema COMPATIBLE</td><td>rg(A) = n.º incógnitas</td><td>Sistema DETERMINADO
(solución única)</td></tr>
<tr><td>rg(A) < n.º incógnitas</td><td>Sistema INDETERMINADO
(infinitas soluciones)</td></tr>
<tr><td>rg(A) ≠ rg(A*)</td><td colspan="2">Sistema INCOMPATIBLE
(sin solución)</td></tr>
</table>

COMPATIBILIDAD. TEOREMA DE ROUCHÉ-FRÖBENIUS.

Estudia la compatibilidad del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = 4 \\ 5x - 5y + 2z = 1 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & -5 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ 5 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \mathrm{R(A)} = 2 \qquad \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 5 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 40 \neq 0 \rightarrow \mathrm{R(A^*)} = 3$$

Como $\mathrm{R}(\mathrm{A}) \neq \mathrm{R}(\mathrm{A}^*) \rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado

SISTEMAS LINEALES HOMEGÉNEOS.

Se considera el sistema lineal homogéneo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Se verifica que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*)$, ya que la columna que se añade a A para formar A^* es nula. Por consiguiente, aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible.

- Un sistema lineal homogéneo es siempre **compatible**.
- Si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*) =$ número de incógnitas, el sistema es compatible **determinado**.

  Su solución única es $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$, que se llama **solución trivial** o **impropia**.
- Si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*) <$ número de incógnitas, el sistema es compatible **indeterminado** y, por tanto, tiene infinitas soluciones, aparte de la trivial.

SISTEMAS LINEALES DEPENDIENTES DE PARÁMETROS.

Discute el siguiente sistema en función de los valores de a:

$$\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x - ay + z = 1 \\ x + y + z = a + 2 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 = (1 + a)(1 - a)$$

- Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$, se cumple que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*) = 3 =$ número de incógnitas.
- Si $a = -1$, $\mathrm{rg}(A) = 2$, ya que, por ejemplo, el menor de orden 2, $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

  $\mathrm{rg}(A^*) = 2 = \mathrm{rg}(A) < 3 =$ número de incógnitas
- Si $a = 1$ $\quad \mathrm{rg}(A) = 2 \neq \mathrm{rg}(A^*) = 3$.

Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$, el sistema es compatible determinado.

Si $a = -1$, el sistema es compatible indeterminado.

Si $a = 1$, el sistema es incompatible.

SISTEMAS LINEALES DEPENDIENTES DE PARÁMETROS.

Discute y resuelve, cuando sea posible, el siguiente sistema en función de m:

$$\begin{cases} (2m+2)x + my + 2z = 2m-2 \\ 2x + (2-m)y = 0 \\ (m+1)x + (m+1)z = m-1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2m+2 & m & 2 \\ 2 & 2-m & 0 \\ m+1 & 0 & m+1 \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} 2m+2 & m & 2 & 2m-2 \\ 2 & 2-m & 0 & 0 \\ m+1 & 0 & m+1 & m-1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2m+2 & m & 2 \\ 2 & 2-m & 0 \\ m+1 & 0 & m+1 \end{vmatrix} = 2m - 2m^3 = -2m(m+1)(m-1) \to m = 0,\ m = 1,\ m = -1$$

SISTEMAS LINEALES DEPENDIENTES DE PARÁMETROS.

Discute y resuelve, cuando sea posible, el siguiente sistema en función de m:

$$\begin{cases} (2m+2)x + my + 2z = 2m-2 \\ 2x + (2-m)y = 0 \\ (m+1)x + (m+1)z = m-1 \end{cases}$$

- Si $m \neq 0$, $m \neq 1$ y $m \neq -1 \to |A| \neq 0 \to R(A) = 3 \to R(A|B) = 3 \to$ S.C.D.

$$A = \begin{pmatrix} 2m+2 & m & 2 \\ 2 & 2-m & 0 \\ m+1 & 0 & m+1 \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} 2m+2 & m & 2 & 2m-2 \\ 2 & 2-m & 0 & 0 \\ m+1 & 0 & m+1 & m-1 \end{pmatrix}$$

SISTEMAS LINEALES DEPENDIENTES DE PARÁMETROS.

Discute y resuelve, cuando sea posible, el siguiente sistema en función de m:

$$\begin{cases} (2m+2)x + my + 2z = 2m-2 \\ 2x + (2-m)y = 0 \\ (m+1)x + (m+1)z = m-1 \end{cases}$$

- Si $m = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{cases} |A| = 0 \to R(A) = 2 \\ R(A|B) = 2 \end{cases}\right\} \to R(A) = R(A|B) < \text{n° incógnitas} \to \text{S.C.I.}$$

SISTEMAS LINEALES DEPENDIENTES DE PARÁMETROS.

Discute y resuelve, cuando sea posible, el siguiente sistema en función de m:

$$\begin{cases} (2m+2)x + my + 2z = 2m-2 \\ 2x + (2-m)y = 0 \\ (m+1)x + (m+1)z = m-1 \end{cases}$$

- Si $m = -1$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{cases} R(A) = 2 \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \to R(A|B) = 3 \end{cases}\right\} \to R(A) \neq R(A|B) \to \text{S.I.}$$

SISTEMAS LINEALES DEPENDIENTES DE PARÁMETROS.

Discute y resuelve, cuando sea posible, el siguiente sistema en función de m:

$$\begin{cases} (2m+2)x + my + 2z = 2m-2 \\ 2x + (2-m)y = 0 \\ (m+1)x + (m+1)z = m-1 \end{cases}$$

- Si $m = 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{cases} R(A) = 2 \\ R(A|B) = 2 \end{cases}\right\} \to R(A) = R(A|B) < \text{n° incógnitas} \to \text{SC..I.}$$

SISTEMAS LINEALES DEPENDIENTES DE PARÁMETROS.

Discute y resuelve, cuando sea posible, el siguiente sistema en función de m:

$$\begin{cases} (2m+2)x + my + 2z = 2m-2 \\ 2x + (2-m)y = 0 \\ (m+1)x + (m+1)z = m-1 \end{cases}$$

Conclusión:

- Si $m \neq 0$, $m \neq 1$ y $m \neq -1 \to$ S.C.D.
- Si $m = 0 \to$ S.C.I.
- Si $m = -1 \to$ S.I.
- Si $m = 1 \to$ S.C.I.

SISTEMAS LINEALES DEPENDIENTES DE PARÁMETROS.

Discute y resuelve, cuando sea posible, el siguiente sistema en función de m:

$$\begin{cases} (2m+2)x+my+2z=2m-2 \\ 2x+(2-m)y=0 \\ (m+1)x+(m+1)z=m-1 \end{cases}$$

$$A|B=\begin{pmatrix} 2m+2 & m & 2 & 2m-2 \\ 2 & 2-m & 0 & 0 \\ m+1 & 0 & m+1 & m-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2m+2 & m & 2 \\ 2 & 2-m & 0 \\ m+1 & 0 & m+1 \end{vmatrix}=-2m(m+1)(m-1)$$

• Si $m\neq 0,\ m\neq 1\ y\ m\neq -1$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2m-2 & m & 2 \\ 0 & 2-m & 0 \\ m-1 & 0 & m+1 \end{vmatrix}}{-2m(m+1)(m-1)}=\frac{\cancel{2}\,\cancel{m}\,(2-m)\,\cancel{(m-1)}}{-\cancel{2}\,\cancel{m}\,(m+1)\,\cancel{(m-1)}}=\frac{m-2}{(m+1)}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2m+2 & 2m-2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ m+1 & m-1 & m+1 \end{vmatrix}}{-2m(m+1)(m-1)}=\frac{\cancel{-}2\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{m}\,\cancel{(m-1)}}{\cancel{-}\cancel{2}\,\cancel{m}\,(m+1)\,\cancel{(m-1)}}=\frac{2}{m+1}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2m+2 & m & 2m-2 \\ 2 & 2-m & 0 \\ m+1 & 0 & m-1 \end{vmatrix}}{-2m(m+1)(m-1)}=\frac{\cancel{-2m}\,\cancel{(m-1)}}{\cancel{-2m}\,(m+1)\,\cancel{(m-1)}}=\frac{1}{m+1}$$

SISTEMAS LINEALES DEPENDIENTES DE PARÁMETROS.

Discute y resuelve, cuando sea posible, el siguiente sistema en función de m:

$$\begin{cases} (2m+2)x+my+2z=2m-2 \\ 2x+(2-m)y=0 \\ (m+1)x+(m+1)z=m-1 \end{cases}$$

• Si $m=0$.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A|B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x+2z=-2 \\ 2x+2y=0 \\ x+z=-1 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x+y=0 \\ x+z=-1 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} y=-\lambda \\ z=-1-\lambda \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x=\lambda \\ y=-\lambda \\ z=-1-\lambda \end{cases}\qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

SISTEMAS LINEALES DEPENDIENTES DE PARÁMETROS.

Discute y resuelve, cuando sea posible, el siguiente sistema en función de m:

$$\begin{cases} (2m+2)x+my+2z=2m-2 \\ 2x+(2-m)y=0 \\ (m+1)x+(m+1)z=m-1 \end{cases}$$

• Si $m=1$.

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A|B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x+y+2z=0 \\ 2x+y=0 \\ 2x+2z=0 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} 2x+y=0 \\ x+z=0 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} y=-2\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x=\lambda \\ y=-2\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}\qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

SISTEMAS LINEALES DEPENDIENTES DE PARÁMETROS.

Discute y resuelve, cuando sea posible, el siguiente sistema en función de m:

$$\begin{cases} (2m+2)x+my+2z=2m-2 \\ 2x+(2-m)y=0 \\ (m+1)x+(m+1)z=m-1 \end{cases}$$

Conclusión final:

• Si $m\neq 0,\ m\neq 1\ y\ m\neq -1$ $\rightarrow$ S.C.D. $\rightarrow x=\dfrac{m-2}{m+1}\ ;\ y=\dfrac{2}{m+1}\ ;\ z=\dfrac{1}{m+1}$

• Si $m=0$ $\rightarrow$ S.C.I. $\rightarrow x=\lambda\ ;\ y=-\lambda\ ;\ z=-1-\lambda\ ;\ \lambda\in\mathbb{R}$

• Si $m=-1$ $\rightarrow$ S.I.

• Si $m=1$ $\rightarrow$ S.C.I. $\rightarrow x=\lambda\ ;\ y=-2\lambda\ ;\ z=-\lambda\ ;\ \lambda\in\mathbb{R}$