FICHA DE **CONSOLIDACIÓN**

Cálculo de derivadas a partir de la definición

La **derivada de una función *f*(*x*) en el punto $x = a$ del dominio** es $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

La **función derivada de *f*(*x*)** o **derivada de *f*(*x*)** es $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{x}$ para cualquier *x* del dominio de *f*.

1. Calcula la derivada de las siguientes funciones en el punto que se indica. Fíjate en el ejemplo.

$$f(x) = x + 1 \text{ en } x = 1 \Rightarrow f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h+1) - (1+1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

a) $f(x) = -2x + 3$ en $x = -3$

b) $f(x) = x + 5$ en $x = 5$

c) $f(x) = \frac{\pi}{3}$ en $x = \sqrt{2}$

d) $f(x) = x^2 - 1$ en $x = -2$

e) $f(x) = -3x^2 - 5x + 1$ en $x = 2$

f) $f(x) = \frac{x-2}{x}$ en $x = 1$

g) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 3x$ en $x = 3$

h) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ en $x = -1$

i) $f(x) = \frac{4x-3}{5}$ en $x = \frac{2}{3}$

j) $f(x) = \frac{x - x^2}{2}$ en $x = 0$

k) $f(x) = \sqrt{3x+4}$ en $x = 4$

l) $f(x) = \frac{-2}{x^2}$ en $x = 1$

2. Calcula la derivada de las siguientes funciones aplicando la definición. Fíjate en el ejemplo.

$$f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + 1 - (x^2+1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x+h) = 2x$$

a) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

b) $f(x) = \frac{5-3x}{7}$

c) $f(x) = 7$

d) $f(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{\sqrt{2}}{5}$

e) $f(x) = -2x^2 + 3x - 4$

f) $f(x) = x^2 - 3x$

g) $f(x) = -\frac{7}{2}x^2 + \frac{3}{5}x - 4$

h) $f(x) = \frac{1}{x+1}$

i) $f(x) = \frac{1}{2x-3}$

j) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

k) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

l) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

FICHA DE **CONSOLIDACIÓN** Cálculo de derivadas aplicando las reglas

1. Calcula la derivada de cada función.

a) $f(x) = 3x^2$

b) $f(x) = -5x^4 + 10x^3 - 6x^2 + x - \frac{1}{2}$

c) $f(x) = (x+4)(2x^2 - 2)$

d) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

e) $f(x) = \frac{4x^3 + 9x^2}{3x+5}$

f) $f(x) = \sqrt{16x+1}$

g) $f(x) = \sqrt[3]{-x^2+5}$

h) $f(x) = \sqrt[12]{3x^{10} + \frac{1}{3}x^9 - \frac{5}{6}x^8 + 7x^3 + 19}$

i) $f(x) = \log(3x-2)$

j) $f(x) = \log e^x$

k) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{10x+4}{10x-4}}$

l) $f(x) = \sqrt{\ln\frac{10x+4}{10x-4}}$

m) $hf(x) = x^{x^2+7}$

n) $f(x) = (6x-1)^{4x^2}$

ñ) $f(x) = \text{sen}(6x+2)$

o) $f(x) = \arccos(x^{2x} + x^x + 5)$

p) $f(x) = \arccos(\ln x)$

q) $f(x) = \text{tg}\frac{3}{x} + \text{tg}\frac{x}{3}$

r) $f(x) = \text{arcsen}\, x\sqrt{x}$

s) $f(x) = \text{arctg}\,(x+2)^{x-2} + \text{tg}\frac{5x}{\sqrt{x+1}}$

t) $f(x) = \text{sen}(-5x^2+10)$

u) $f(x) = \cos\sqrt{x+1}$

v) $f(x) = \sqrt[3]{\text{arcsen}(2x)}$

w) $f(x) = \ln\frac{1}{3x} + 7x^2$

x) $f(x) = \cos(\cos x)$

y) $f(x) = 6(\ln x)^2 - 10\ln x + 2$

z) $f(x) = (4x^2-1)^{\ln x}$

2. Calcula las derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = e^{4x+9} + \ln(4x+9)$

b) $f(x) = \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x+1}$

c) $f(x) = \cos^3\sqrt{x}$

d) $f(x) = \text{sen}^2(x^2+3x-1)$

e) $f(x) = \log(\log(\frac{1}{x}))$

f) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+\text{tg}\,x}{1-\text{tg}\,x}}$

g) $f(x) = (1-\arccos x)(1+\arccos x)$

h) $f(x) = \frac{8x^4 + 5x^3 + x^2}{\text{sen}(x^2+x+3)}$

i) $f(x) = (\text{arctg}(x+1))^{x+1}$

j) $f(x) = \sqrt[100]{\ln x^2}$

k) $f(x) = \frac{1-\text{sen}\,x}{1+\text{sen}\,x}$

l) $f(x) = \sqrt{\cos^2 x - \cos x}$

m) $f(x) = \sqrt{\cos 3\left(\frac{\text{tg}\,x}{x}\right)}$

n) $f(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}$

ñ) $f(x) = \ln(x-3)\cdot(x+3)$

o) $f(x) = \left(\frac{\ln x}{2x}\right)^{tg\,x}$

p) $f(x) = \cos(-x^3 + \ln x^2)$

q) $f(x) = \sqrt{\frac{-10x}{x^4-2}} + 6x^2 - 12$

FICHA DE **CONSOLIDACIÓN**

Determinación de parámetros a partir de parámetros sobre la derivada

Para hallar los puntos en los que la derivada de una función *f* tenga un cierto valor *k*, se resuelve la ecuación:

$$f'(x) = k$$

Las soluciones de esta ecuación son las abscisas de los puntos buscados. Para obtener la imagen se sustituye el valor de la abscisa en la función *f*.

Las **abscisas "*x*" de los posibles extremos relativos** (máximos o mínimos) cumplen que $f'(x) = 0$.

La **pendiente de la recta tangente a la gráfica** $y = f(x)$ **en el punto** $P(a,\ f(a))$ es $f'(a)$.

1. **Halla los números *b* y *c* para que la curva $y = x^3 + bx + c$ pase por (–1, 2) y alcance un mínimo relativo en (1, 1).**

2. **Calcula el valor de *a* para que la parábola $f(x) = -x^2 + \frac{1}{2}x + a$ tome valor 7 en su máximo.**

3. **Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + b$. Halla *a* y *b* para que la función *f* tenga un mínimo en (2, –3).**

4. **Calcula el valor de los parámetros *a b* y *c* de la curva $y = -x^3 + ax^2 + bx + c$ sabiendo que la curva pasa por (–1, 0) y presenta un extremo relativo en $x = 1$ y otro en $x = 0$.**

5. **Dada la función cuadrática $y = -x^2 + bx + c$. Determina los valores *b* y *c* para que pase por (0, –4) y la pendiente en el punto de abscisa $x = 1$ sea 2.**

6. **Halla *a*, *b* y *c* para que la parábola $y = ax^2 + bx + c$ tenga un mínimo en (–1, 2) y pase por (0, 3).**

7. **Dada la función $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Halla *a*, *b*, *c* y *d* para que tenga un extremo relativo en (0, 2) y otro en (1, 0).**

FICHA DE **PROFUNDIZACIÓN** Derivadas de funciones a trozos

Se considera la función definida a trozos $f(x)=\begin{cases} f_1(x) & \text{si } x<a \\ f_2(x) & \text{si } x\geq a \end{cases}$ que verifica que:

- *f* es continua en todos los puntos de $\mathbb{R}$.
- f_1 es derivable en todos los valores *x* reales tales que *x* < a.
- f_2 es derivable en todos los valores *x* reales tales que *x* > *a.*

La función derivada de *f* en todos los puntos de $\mathbb{R}$ salvo en *x* = *a* viene dada por la expresión:

$$f'(x)=\begin{cases} f_1'(x) & \text{si } x<a \\ f_2'(x) & \text{si } x>a \end{cases}$$

En *x* = *a* la función *f* es continua pero:

- Es **derivable** si se verifica que $f'(a^-)=f'_1(a)$ y $f'(a^+)=f'_2(a)$ son iguales.
- **No es derivable** si $f'(a^-)\neq f'(a^+)$.

1. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & \text{si } x<2 \\ -x+5 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$

a) Comprueba que es continua en todo $\mathbb{R}$**.**

b) Calcula la función derivada de *f* en todos los puntos diferentes de *x* = 2.

c) Decide si *f* es o no derivable en *x* = 2.

d) Dibuja la función.

2. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x<-1 \\ x^2+3x & \text{si } x\geq -1 \end{cases}$

a) Comprueba que es continua en todo $\mathbb{R}$**.**

b) Calcula la función derivada de *f* en todos los puntos diferentes de *x* = –1.

c) Decide si *f* es o no derivable en *x* = –1.

d) Dibuja la función.

3. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} -2x+3 & \text{si } x<0 \\ x^2-2x+1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

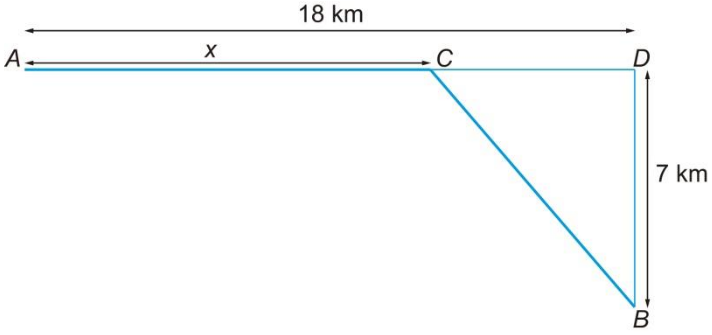
a) Calcula la función derivada de *f* en todos los puntos diferentes de *x* = 0.

b) ¿Por qué la función no es derivable en *x* = 0?

c) Dibuja la función.

FICHA DE **PROFUNDIZACIÓN** Más problemas de optimización

1. Se quiere construir una línea de ferrocarril que vaya de la ciudad *A* a la ciudad *B*. El trayecto *ACB* debe tener la forma que se señala en la figura.

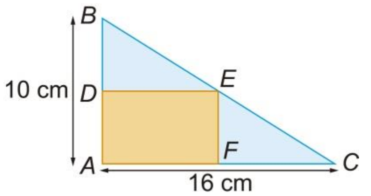


El primer tramo del trayecto *AC* tiene un coste de 10 millones de euros por kilómetro y el segundo tramo *CB* tiene un coste de 15 millones de euros por kilómetro.

a) Escribe una función $C(x)$ que determine el coste total de la línea en función de la longitud x del primer tramo *AC*.

b) Calcula el valor de x para que el coste de la línea sea mínimo. Determina dicho coste.

2. En el triángulo rectángulo de catetos 10 y 15 cm, se quiere inscribir un rectángulo tal que uno de sus ángulos coincida con el ángulo recto del triángulo y el vértice opuesto pertenezca a la hipotenusa, tal y como se muestra en la figura.



Calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir de esta forma.

3. Se quiere inscribir un cilindro dentro de un cono. Las medidas del cono son 15 cm de altura y 5 cm de radio de la base. ¿Cuáles son las medidas del cilindro de mayor volumen?