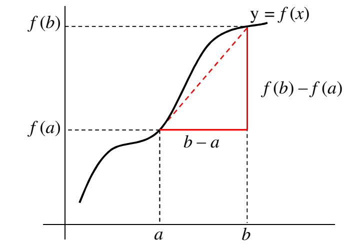
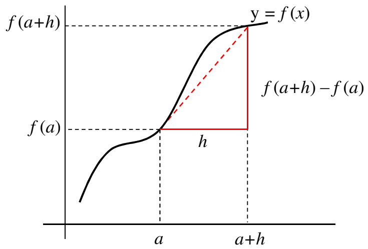
DERIVADAS
1º Bachillerato
CC.SS.

CRECIMIENTO. TASA DE VARIACIÓN MEDIA.

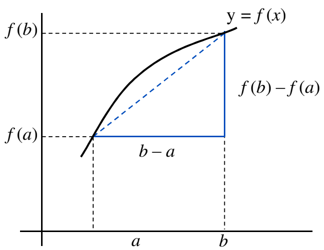


$$\text{T.V.M.}\left[a,b\right] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

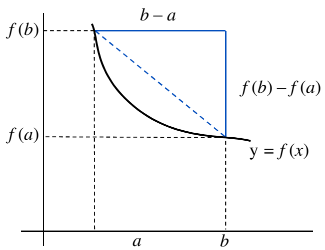


$$\text{T.V.M.}\left[a,a+h\right] = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

CRECIMIENTO. TASA DE VARIACIÓN MEDIA.



$$\text{T.V.M.}\left[a,b\right] > 0$$



$$\text{T.V.M.}\left[a,b\right] < 0$$

CRECIMIENTO. TASA DE VARIACIÓN MEDIA.

Hallar la T.V.M. de la función $f(x) = 5x - x^2$ en los intervalos

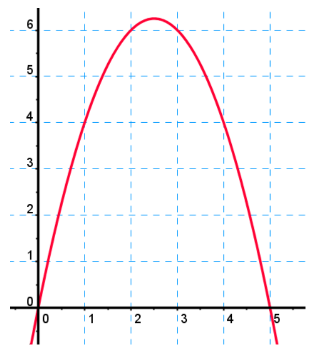
[0 , 1] , [1 , 2] , [1 , 3] , [3 , 5]

$$\text{T.V.M.}\left[0,1\right] = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{4 - 0}{1} = \frac{4}{1} = 4$$

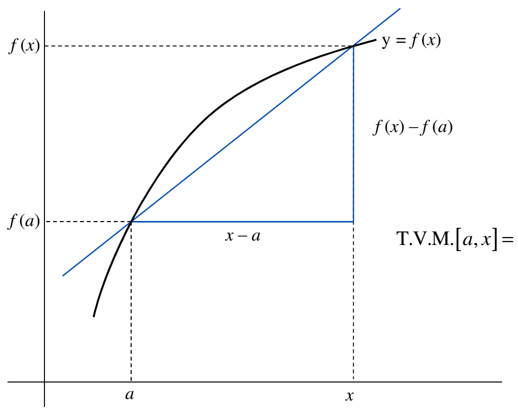
$$\text{T.V.M.}\left[1,2\right] = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{6 - 4}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{T.V.M.}\left[1,3\right] = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{6 - 4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{T.V.M.}\left[3,5\right] = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{0 - 6}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

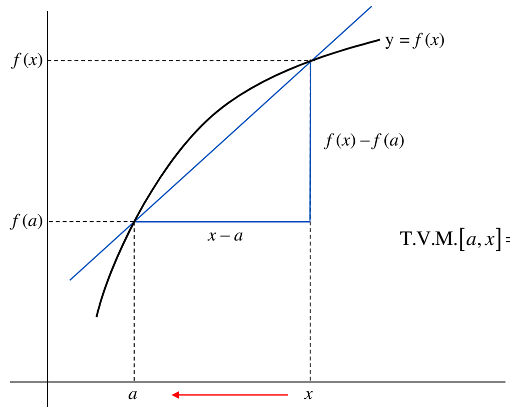


DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.



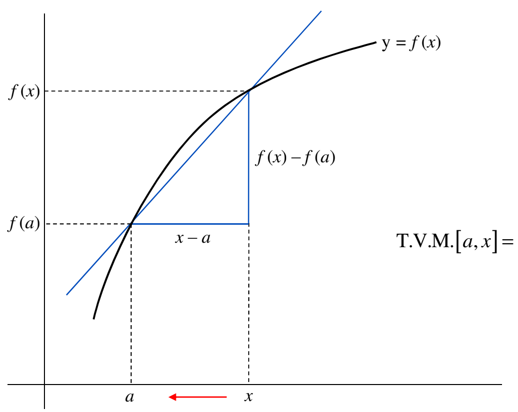
$$\text{T.V.M.}[a, x] = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.



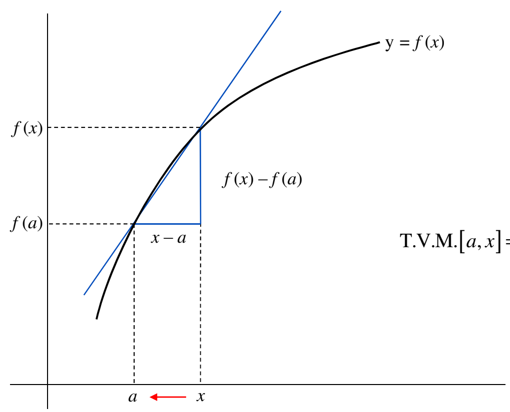
$$\text{T.V.M.}[a, x] = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.



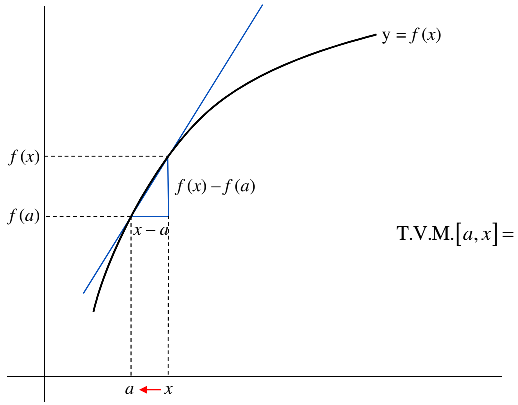
$$\text{T.V.M.}[a, x] = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.



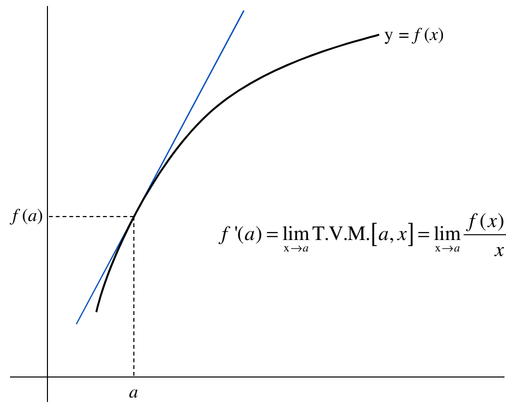
$$\text{T.V.M.}[a, x] = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.



$$\text{T.V.M.}[a, x] = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

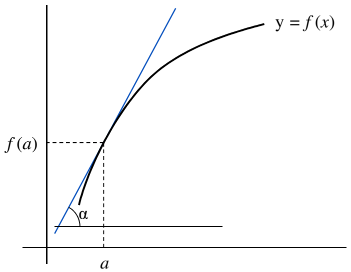
DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.



$$f'(a) = \lim_{x \to a} \text{T.V.M.}[a, x] = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.

Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.



$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'(a) = \operatorname{tg} \alpha$$

La derivada de una función en un punto es la tangente del ángulo que forma la recta tangente a la curva en el punto con la horizontal.

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Halla la derivada de la función $f(x) = 5x - x^2$ en el punto $x = 1$.

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(5(1 + h) - (1 + h)^2\right) - 4}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(5 + 5h - \left(1 + h^2 + 2h\right)\right) - 4}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5 + 5h - 1 - h^2 - 2h - 4}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3h - h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (3 - h) = 3$$

FUNCIÓN DERIVADA

$$\boxed{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

Halla la derivada de la función $f(x) = x^2$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+h^2+2xh-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2xh}{h}=\lim_{h\to 0}(h+2x)=2x$$

FUNCIÓN DERIVADA

Derivada de la función constante. $\boxed{f(x)=k\rightarrow(k)'=0}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

$$(5)'=0$$

Derivada de la función x. $\boxed{f(x)=x\rightarrow(x)'=1}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

FUNCIÓN DERIVADA

Derivada de la función potencia. $\boxed{f(x)=x^n\rightarrow(x^n)'=n\cdot x^{n-1}}$

$$(x^2)'=2\cdot x^{2-1}=2x \qquad (x^4)'=4\cdot x^{4-1}=4x^3$$

Derivada de la función raíz. $\boxed{f(x)=\sqrt{x}\rightarrow(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$

$$(\sqrt{x})'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

FUNCIÓN DERIVADA

Derivada de la función exponencial. $\boxed{f(x)=a^x\rightarrow(a^x)'=a^x\cdot\ln a}$

$$(2^x)'=2^x\cdot\ln 2 \qquad (e^x)'=e^x\cdot\ln e=e^x$$

Derivada de la función logaritmo. $\boxed{(\log_a x)'=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln a}}$

$$(\log_2 x)'=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln 2} \qquad (\ln x)'=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln e}=\frac{1}{x}$$

FUNCIÓN DERIVADA

Derivada del producto de un número por una función.

$$\boxed{(k\cdot f(x))' = k\cdot f'(x)}$$

$$\left(3\cdot x^2\right)' = 3\cdot\left(x^2\right)' = 3\cdot 2x = 6x$$

$$\left(5\cdot 2^x\right)' = 5\cdot\left(2^x\right)' = 5\cdot 2^x\cdot \ln 2$$

$$\left(3\cdot \ln x\right)' = 3\cdot\left(\ln x\right)' = 3\cdot\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{x}$$

FUNCIÓN DERIVADA

Derivada de la suma de dos funciones.

$$\boxed{(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)}$$

$$\left(e^x + x^2\right)' = \left(e^x\right)' + \left(x^2\right)' = e^x + 2x$$

$$\left(\ln x + x\right)' = \left(\ln x\right)' + \left(x\right)' = \frac{1}{x} + 1 = \frac{1+x}{x}$$

$$\left(\ln x + 2^x\right)' = \left(\ln x\right)' + \left(2^x\right)' = \frac{1}{x} + 2^x\cdot\ln 2 = \frac{1+2^x\cdot x\cdot\ln 2}{x}$$

FUNCIÓN DERIVADA

Derivada del producto de funciones.

$$\boxed{(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)}$$

$$\left(e^x\cdot x^2\right)' = \left(e^x\right)'\cdot x^2 + e^x\cdot\left(x^2\right)' = e^x\cdot x^2 + e^x\cdot 2x = e^x\left(x^2+2x\right)$$

$$\left(e^x\cdot \ln x\right)' = \left(e^x\right)'\cdot \ln x + e^x\cdot\left(\ln x\right)' = e^x\cdot\ln x + e^x\cdot\frac{1}{x} = e^x\left(\frac{x\cdot\ln x+1}{x}\right)$$

$$\left(e^x\cdot x\right)' = \left(e^x\right)'\cdot x + e^x\cdot\left(x\right)' = e^x\cdot x + e^x\cdot 1 = e^x\left(x+1\right)$$

FUNCIÓN DERIVADA

Derivada del cociente de funciones.

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}}$$

$$\left(\frac{x}{e^x}\right)' = \frac{1\cdot e^x - x\cdot e^x}{\left(e^x\right)^2} = \frac{e^x\left(1-x\right)}{e^{2x}}$$

$$\left(\frac{x}{\ln x}\right)' = \frac{1\cdot\ln x - x\cdot\frac{1}{x}}{\left(\ln x\right)^2} = \frac{\ln x - 1}{\left(\ln x\right)^2}$$

FUNCIÓN DERIVADA

Derivada de la composición de funciones. Regla de la cadena.

$$\boxed{(f\circ g(x))' = (f[g(x)])' = f'(g(x))\cdot g'(x)}$$

$$\left(\sqrt{x+5}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x+5}}\cdot(x+5)' = \frac{1}{2\sqrt{x+5}}\cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x+5}}$$

$$\left(2^{\sqrt{x}}\right)' = 2^{\sqrt{x}}\cdot\ln 2\cdot\left(\sqrt{x}\right)' = 2^{\sqrt{x}}\cdot\ln 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2^{\sqrt{x}}\cdot\ln 2}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\ln\left(x^2+x\right)\right)' = \left[\frac{1}{\left(x^2+x\right)}\right]\cdot(2x+1)$$

TABLA DE DERIVADAS

$(k)'=0$ $(x)'=1$ $(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$ $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(a^x)'=a^x\cdot\ln a$ $(e^x)'=e^x$ $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ $(\log_a x)'=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln a}$
$(k\cdot f(x))'=k\cdot f'(x)$ $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$ $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ $(f\circ g(x))'=(f[g(x)])'=f'(g(x))\cdot g'(x)$

FUNCIÓN DERIVADA

Ejemplos:

$$\left(\ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)\right)' = \frac{1}{\frac{x+1}{x-2}}\cdot\frac{1\cdot(x-2)-(x+1)\cdot 1}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{-3}{(x+1)\cdot(x-2)} = \frac{-3}{x^2-x-2}$$

FUNCIÓN DERIVADA

Ejemplos:

$$\left(2^{\frac{x+1}{x-2}}\right)' = 2^{\frac{x+1}{x-2}}\cdot\ln\ 2\cdot\frac{1\cdot(x-2)-(x+1)\cdot 1}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{-3\cdot 2^{\frac{x+1}{x-2}}\cdot\ln\ 2}{(x-2)^2} = \frac{-3\cdot 2^{\frac{x+1}{x-2}}\cdot\ln\ 2}{x^2-4x+4}$$

FUNCIÓN DERIVADA

Ejemplos:

$$\left(\ln\sqrt{\frac{x}{x+3}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{x+3}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x+3}}}\cdot\frac{1\cdot(x+3)-x\cdot 1}{(x+3)^2} =$$

$$= \frac{3}{2\cdot\frac{x}{x+3}\cdot(x+3)^2} = \frac{3}{2\cdot x\cdot(x+3)} = \frac{3}{2x^2+6x}$$

RECTA TANGENTE A UNA CURVA EN UN PUNTO.

Si f es derivable en el punto x_0, la ecuación de la **recta tangente** a f en el punto x_0 es:

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

Si f es derivable en el punto x_0, la ecuación de la **recta normal** a f en el punto x_0 es:

$$\boxed{y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)}$$

RECTA TANGENTE A UNA CURVA EN UN PUNTO.

Hallar la ecuación de la recta tangente y normal a la curva f en el punto $x_0 = 3$.

$$f(x) = \frac{x^2-2x}{x+3}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x+3)-(x^2-2x)}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x-6}{x^2+6x+9} \rightarrow f'(3) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2} + \frac{7}{12}(x-3)}$$

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{7}{12}}(x-3) \quad \rightarrow \quad \boxed{y = \frac{1}{2} - \frac{12}{7}(x-3)}$$

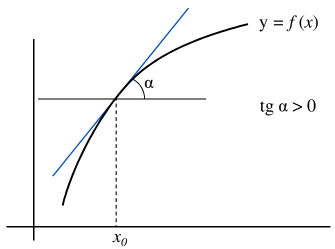
CRECIMIENTO, DECRECIMIENTO, MÁXIMOS Y MÍNIMOS

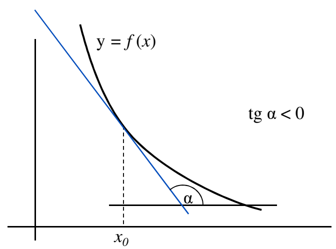
f es derivable y creciente en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$

f es derivable y decreciente en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$

$f'(x_0) > 0 \Rightarrow$ f es derivable y creciente en x_0

$f'(x_0) < 0 \Rightarrow$ f es derivable y decreciente en x_0





CRECIMIENTO, DECRECIMIENTO, MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Estudia el crecimiento y decrecimiento en la función:

$$f(x) = x^2 - 4x + 6$$

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 2x - 4$$

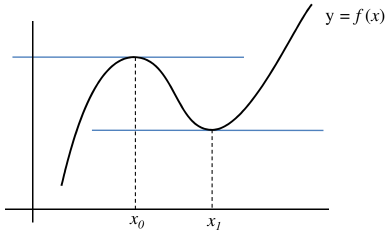
$$f'(x) = 0 \to x = 2$$

$f' < 0$ ↘	2	$f' > 0$ ↗

f es decreciente en]−∞ , 2[y creciente en]2 , +∞[

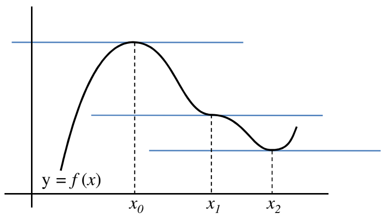
CRECIMIENTO, DECRECIMIENTO, MÁXIMOS Y MÍNIMOS

$$\boxed{\text{f tiene un máximo o mínimo relativo en } x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0}$$



CRECIMIENTO, DECRECIMIENTO, MÁXIMOS Y MÍNIMOS

$$\boxed{\text{f tiene un punto singular en } x_0 \text{ si } f'(x_0) = 0}$$



Los puntos singulares son máximos, mínimos o puntos de inflexión.

CRECIMIENTO, DECRECIMIENTO, MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Halla los máximos y mínimos de la función: $f(x) = x^3 - 3x$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = 3x^2 - 3$

$$f'(x) = 0 \to 3x^2 - 3 = 0 \to x^2 - 1 = 0 \to \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

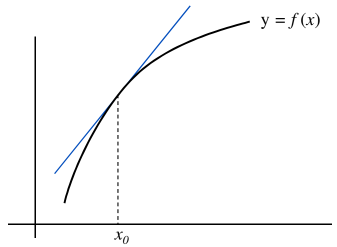
$f' > 0$ ↗	−1	$f' < 0$ ↘	1	$f' > 0$ ↗
	Máximo		Mínimo	

Máximo en x = −1 y mínimo en x = 1

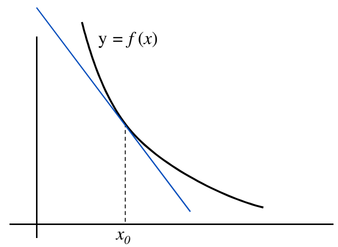
CONCAVIDAD, CONVEXIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

f es cóncava en x_0 si la curva está por debajo de la recta tangente en x_0.

f es convexa en x_0 si la curva está por encima de la recta tangente en x_0.



f es cóncava

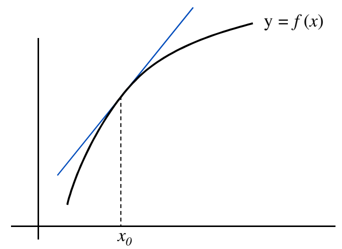


f es convexa

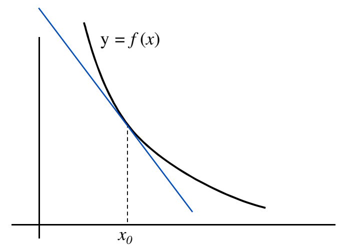
CONCAVIDAD, CONVEXIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ f es cóncava en x_0

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ f es convexa en x_0



f es cóncava



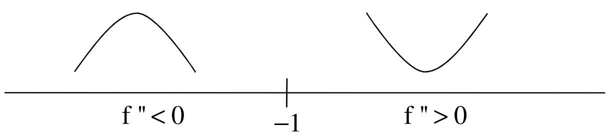
f es convexa

CONCAVIDAD, CONVEXIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

Estudia la curvatura de la función: $f(x) = x^3 + 3x^2$

$f'(x) = 3x^2 + 6x$ $\qquad$ $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$f''(x) = 6x + 6$ $\qquad$ $f''(x) = 0 \rightarrow x = -1$



f es cóncava en $]-\infty\ ,\ -1[$ y convexa en $]-1\ ,\ +\infty[$

f tiene un punto de inflexión en $x = -1$

REPRESENTACIÓN DE UNA FUNCIÓN.

1. Dominio.

2. Puntos de corte con los ejes.

3. Simetría.

4. Periodicidad.

5. Asíntotas.

6. Monotonía.

7. Curvatura.

8. Representación.

REPRESENTACIÓN DE $f(x) = x^3 + 3x^2$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
P.C.: $(0,0)$ y $(-3,0)$

1. Dominio.

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

2. Puntos de corte.

Eje OX:

$$f(x) = 0 \to x^3 + 3x^2 = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x + 3 = 0 \to x = -3 \end{cases}$$

$$\to (0,0) \text{ y } (-3,0)$$

Eje OY:

$$f(0) = 0 \to (0,0)$$

REPRESENTACIÓN DE $f(x) = x^3 + 3x^2$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
P.C.: $(0,0)$ y $(-3,0)$
No es par ni impar
No es periódica

3. Simetría.

$$f(-x) = (-x)^3 + 3(-x)^2 = -x^3 + 3x^2$$

No es par ni impar

4. Periodicidad.

No es periódica

REPRESENTACIÓN DE $f(x) = x^3 + 3x^2$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
P.C.: $(0,0)$ y $(-3,0)$
No es par ni impar
No es periódica
No tiene asíntotas

5. Asíntotas.

A.V. No tiene por ser polinómica y $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

A.H. No tiene por ser polinómica

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^3 + 3x^2 = \pm\infty$$

A.O. No tiene por ser polinómica

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 + 3x^2}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} x^2 + 3x = \pm\infty$$

REPRESENTACIÓN DE $f(x) = x^3 + 3x^2$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
P.C.: $(0,0)$ y $(-3,0)$
No es par ni impar
No es periódica
No tiene asíntotas
↗ ↘ ↗ f'>0 −2 f'<0 0 f'>0 Máximo (−2 , 4) Mínimo (0 , 0)

6. Monotonía.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$f'(x) = 0 \to 3x^2 + 6x = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 6 = 0 \to x = -2 \end{cases}$$

↗ ↘ ↗

$f' > 0$ $\quad -2 \quad$ $f' < 0$ $\quad 0 \quad$ $f' > 0$

Máximo (−2 , 4) Mínimo (0 , 0)

REPRESENTACIÓN DE $f(x) = x^3 + 3x^2$

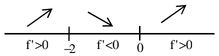
$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

P.C.: $(0,0)$ y $(-3,0)$

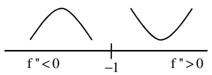
No es par ni impar

No es periódica

No tiene asíntotas



Máximo (−2 , 4)
Mínimo (0 , 0)



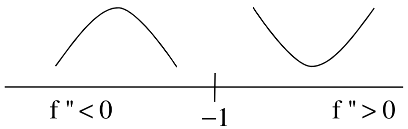
Punto de inflexión (−1 , 2)

7. Curvatura.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$f''(x) = 6x + 6$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 6x + 6 = 0 \rightarrow x = -1$$



Punto de inflexión (−1 , 2)

REPRESENTACIÓN DE $f(x) = x^3 + 3x^2$

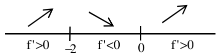
$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

P.C.: $(0,0)$ y $(-3,0)$

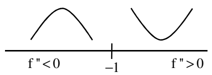
No es par ni impar

No es periódica

No tiene asíntotas

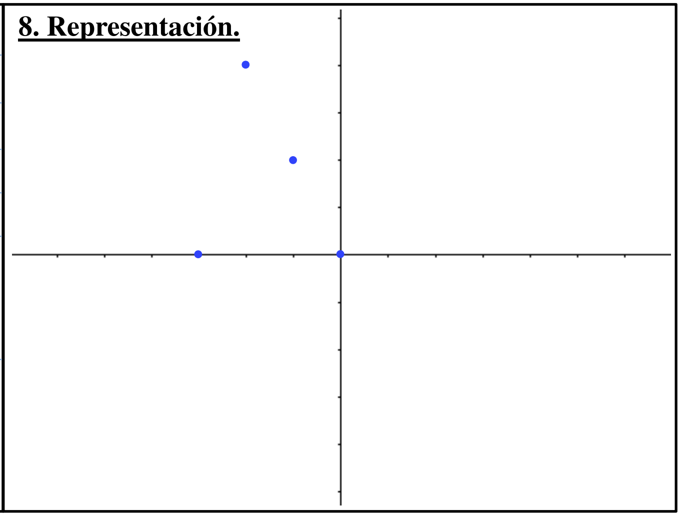


Máximo (−2 , 4)
Mínimo (0 , 0)



Punto de inflexión (−1 , 2)

8. Representación.



REPRESENTACIÓN DE $f(x) = x^3 + 3x^2$

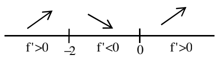
$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

P.C.: $(0,0)$ y $(-3,0)$

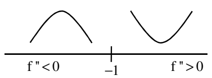
No es par ni impar

No es periódica

No tiene asíntotas



Máximo (−2 , 4)
Mínimo (0 , 0)



Punto de inflexión (−1 , 2)

8. Representación.