LÍMITES Y CONTINUIDAD

1º Bto. Sociales.

CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Sea f(x) = 2x + 3. Vamos a darle valores a x cercanos a 1 y vamos a ver cómo se comporta f(x).

$x \to 1^-$	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	…	$\longrightarrow$ 1
f(x)	4.8	4.98	4.998	4.9998	4.99998	…	$\longrightarrow$ 5

Cuando $x \to 1^-$ (por la izquierda) se cumple que $f(x) \to 5$.

$x \to 1^+$	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001	…	$\longrightarrow$ 1
f(x)	5.2	5.02	5.002	5.0002	5.00002	…	$\longrightarrow$ 5

Cuando $x \to 1^+$ (por la derecha) se cumple que $f(x) \to 5$.

Por lo tanto cuando $x \to 1$ se cumple que $f(x) \to 5$.

CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Una función f(x) tiene por **límite** L en el punto x_0, si a medida que x se acerca a x_0, se verifica que las imágenes se aproximan a L. Se expresa:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Si los valores que tomamos cercanos a x_0 son menores que x_0 estamos calculando el **límite lateral por la izquierda** y se representa:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

Si los valores que tomamos cercanos a x_0 son mayores que x_0 estamos calculando el **límite lateral por la derecha** y se representa:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Calcula $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{6x}{x-5}$

$x \to 2^-$	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	…	$\longrightarrow$ 2
f(x)	–3.67741	–3.96677	–3.99666	–3.99966	–3.99996	…	$\longrightarrow$ – 4

$x \to 2^+$	2.1	2.01	2.001	2.0001	2.00001	…	$\longrightarrow$ 2
f(x)	–4.34482	–4.03448	–4.00333	–4.00033	–4.00003	…	$\longrightarrow$ – 4

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{6x}{x-5} = -4 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{6x}{x-5} = -4 \end{array}\right\} \to \lim_{x \to 2} \frac{6x}{x-5} = -4$$

LÍMITE INFINITO DE UNA FUNCIÓN

Calcula $\lim_{x\to 2} \frac{x}{x-2}$

$x\to 2^-$	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	…	$\longrightarrow 2$
f(x)	–19	–199	–1999	–19999	–199999	…	$\longrightarrow -\infty$

$x\to 2^+$	2.1	2.01	2.001	2.0001	2.00001	…	$\longrightarrow 2$
f(x)	21	201	2001	20001	200001	…	$\longrightarrow +\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x-2} = -\infty \\ \lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x-2} = +\infty \end{array}\right\} \to \nexists \lim_{x\to 2} \frac{x}{x-2}$$

LÍMITE INFINITO DE UNA FUNCIÓN

Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$

$x\to 0^-$	–0.1	–0.01	–0.001	–0.0001	…	$\longrightarrow 0$
f(x)	100	10000	1000000	100000000	…	$\longrightarrow +\infty$

$x\to 0^+$	0.1	0.01	0.001	0.0001	…	$\longrightarrow 0$
f(x)	100	10000	1000000	100000000	…	$\longrightarrow +\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x^2} = +\infty \end{array}\right\} \to \lim_{x\to 2} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN EL INFINITO

Calcula $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x}$

$x\to +\infty$	100	1000	10000	100000	…	$\longrightarrow +\infty$
f(x)	0.01	0.001	0.0001	0.00001	…	$\longrightarrow 0$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

- Si una función tiene límite en un punto, éste es **único**.

- Si una función tiene límites laterales distintos en un punto, entonces no tiene límite en ese punto.

- Si f y g tienen límites en x_0 y k es un número se verifica que:

$\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$	$\lim_{x\to x_0} k\cdot f(x) = k\cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$
$\lim_{x\to x_0} (f\cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$	$\lim_{x\to x_0} (f\circ g)(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)$
$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$ si $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$	$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim_{x\to x_0} g(x)}$

CÁLCULO DE LÍMITES DE FUNCIONES

$$\lim_{x \to 2} \frac{6x}{x-5} = -4 \qquad f(2) = -4$$

Si existe la imagen de la función no definida a trozos en el punto en el que queremos calcular el límite, dicho límite será igual a la imagen por la función en el punto.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x}{x+2} = \frac{3}{5} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{2x}{x^2-5} = 0$$

$$\lim_{x \to -2} 3x^2 - 2 = 10 \qquad \lim_{x \to 5} 2^{x-3} = 4$$

CÁLCULO DE LÍMITES EN EL ∞ DE FUNCIONES

$$\lim_{x \to +\infty} 2x + 5$$

Tabla de ayuda para realizar límites en el infinito ($k > 0$):

$+\infty + \infty = +\infty$	$(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$	$k^{+\infty} = +\infty \quad k > 1$
$-\infty - \infty = -\infty$	$(+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$	$k^{+\infty} = 0 \quad k < 1$
$\pm k + \infty = +\infty$	$(-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$	$(+\infty)^{k} = +\infty$
$\pm k - \infty = -\infty$	$(-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$	$(+\infty)^{-k} = 0$
$k \cdot (+\infty) = +\infty$	$\frac{\pm k}{\pm\infty} = 0$	$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$
$k \cdot (-\infty) = -\infty$		$(+\infty)^{-\infty} = 0$
$(-k)\cdot(+\infty) = -\infty$		
$(-k)\cdot(-\infty) = +\infty$		

CÁLCULO DE LÍMITES EN EL ∞ DE FUNCIONES

$$\lim_{x \to +\infty} 2x + 5 = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} 3^{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+5}{-3} = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^3 + x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x^2-1} = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} 2^{\frac{1}{x-5}} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 - 2x = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} (1-x)^x = 0$$

EXPRESIONES INDETERMINADAS

Calcula $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$

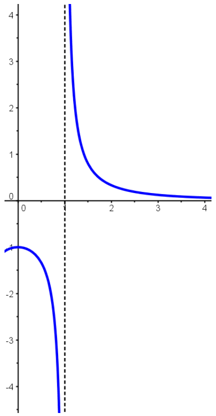
Si se sustituye aparece una expresión sin sentido del tipo $\frac{0}{0}$

Cuando al sustituir en una función para calcular el límite, el resultado no es un número real, surgen las **expresiones indeterminadas** o **indeterminaciones**.

Las indeterminaciones son $\frac{k}{0}, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \infty-\infty, 1^{\infty}, \infty^{0}$ y 0^{0}

EXPRESIONES INDETERMINADAS

Indeterminación del tipo $\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{0}}$



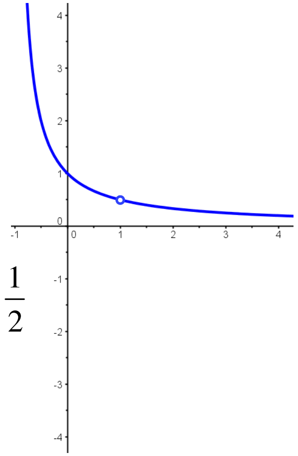
Calcula $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}$

Se hacen los límites laterales $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{x^2-1}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{x^2-1}=+\infty \end{array}\right\}$

Por lo tanto $\nexists \lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}$

EXPRESIONES INDETERMINADAS

Indeterminación del tipo $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$



Calcula $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}$

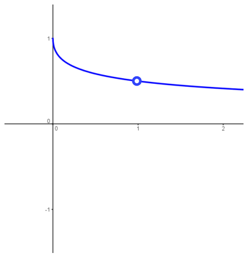
Se simplifica:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}\overset{\frac{0}{0}}{\uparrow}{=}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)}=\frac{1}{2}$$

¡¡¡Cuidado!!! $\cancel{\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)}=\frac{1}{2}}$

EXPRESIONES INDETERMINADAS

Indeterminación del tipo $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$



Calcula $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

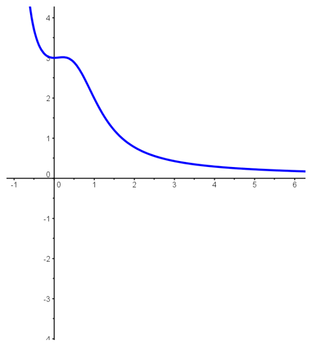
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\uparrow}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

EXPRESIONES INDETERMINADAS

Indeterminación del tipo $\frac{\boldsymbol{\infty}}{\boldsymbol{\infty}}$

Calcula $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2+3}{x^3+1}$



$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+3}{x^3+1}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\uparrow}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{x^2+3}{x^3}}{\frac{x^3+1}{x^3}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{x^2}{x^3}+\frac{3}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}}=0$$

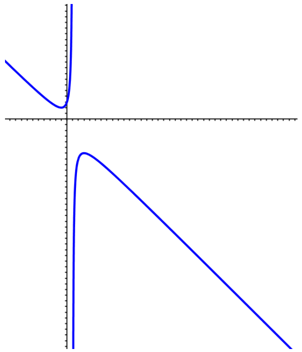
EXPRESIONES INDETERMINADAS

Indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+3}{-x+1}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{-x+1} \overset{\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{\uparrow}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2+3}{x^2}}{\frac{-x+1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{-x}{x^2}+\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{x^2}}{\frac{-1}{x}+\frac{1}{x^2}} \overset{\overset{\frac{1}{0}}{\uparrow}}{=} -\infty$$



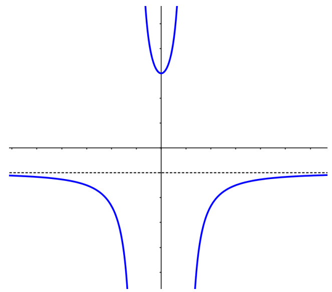
EXPRESIONES INDETERMINADAS

Indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+3}{-x^2+1}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{-x^2+1} \overset{\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{\uparrow}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2+3}{x^2}}{\frac{-x^2+1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{-x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{x^2}}{-1+\frac{1}{x^2}} = -1$$



EXPRESIONES INDETERMINADAS

Indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. REGLA

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{x^3+1} = 0$ Grado mayor Denominador = 0

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{-x+1} = -\infty$ Grado mayor Numerador = ±∞

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{-x^2+1} = -1$ Grado igual = Cociente coeficientes mayor grado

EXPRESIONES INDETERMINADAS

Indeterminación del tipo $\infty - \infty$

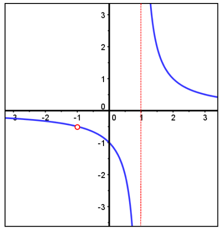
Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - x$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-x \overset{\overset{\infty-\infty}{\uparrow}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+x\right)}{\sqrt{x+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x+1}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-x^2}{\sqrt{x+1}+x} \overset{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\uparrow}}{=} -\infty$$

ASÍNTOTAS

Asíntota vertical.



Una función tiene una asíntota vertical en x = a si:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$$

<u>Ejemplo.</u>

Hallar las asíntotas verticales de la función $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$

$$\underset{\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{-1,1\}}{x^2-1=0} \to \begin{cases} x=-1\to \displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{x+1}}{(\cancel{x+1})(x-1)}=-\frac{1}{2} \to \text{NO A.V.}\\[2ex] x=1\to \displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x^2-1}\to \begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to1^-}\frac{x+1}{x^2-1}=-\infty\\[1ex] \displaystyle\lim_{x\to1^+}\frac{x+1}{x^2-1}=+\infty\end{cases}\to \text{A.V. en } x=1\end{cases}$$

ASÍNTOTAS

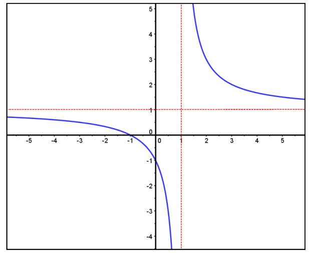
Asíntota horizontal.

Una función tiene una asíntota horizontal y = b si se cumple:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=b$$

<u>Ejemplo.</u>

Hallar las asíntotas horizontales de la función $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$



$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x-1}=1\to \text{A.H. } y=1 \text{ en } -\infty\\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}=1\to \text{A.H. } y=1 \text{ en } +\infty\end{array}\right\}$$

$\to y=1$ es A.H. por los dos lados.

ASÍNTOTAS

Asíntota oblicua.

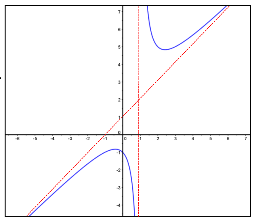
Una función tiene una asíntota oblicua y = mx + n si se cumple:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=m\neq 0 \qquad\qquad n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-mx\right)$$

<u>Ejemplo.</u>

Hallar las asíntotas oblicuas de la función $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$

$$\left.\begin{array}{l} m=\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x(x-1)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x^2-x}=1\\[3ex] n=\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1-(x^2-x)}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+x}{x-1}=1\end{array}\right\}$$



$\to y=x+1$ es A.O. por los dos lados

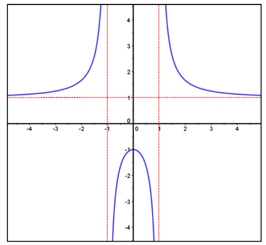
ASÍNTOTAS

Hallar las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

<u>A.V.</u>

$$x^2-1=0\to\begin{cases} x=-1\to \displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^2+1}{x^2-1}\to\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2+1}{x^2-1}=+\infty\\[1ex] \displaystyle\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2+1}{x^2-1}=-\infty\end{cases}\to \text{A.V. en } x=-1\\[4ex] x=1\to \displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2+1}{x^2-1}\to\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+1}{x^2-1}=-\infty\\[1ex] \displaystyle\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+1}{x^2-1}=+\infty\end{cases}\to \text{A.V. en } x=1\end{cases}$$

<u>A.H.</u>



$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=1\to \text{A.H. } y=1 \text{ en } -\infty\\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=1\to \text{A.H. } y=1 \text{ en } +\infty\end{array}\right\}\to\begin{cases}y=1 \text{ es A.H.}\\ \text{por los dos lados}\end{cases}$$

<u>A.O.</u> No tiene por tener horizontal por los dos lados.

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Una función f(x) es **continua** en x = a si cumple que:

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Se tiene que cumplir que:

$$1^{\text{o}})\ \exists \lim_{x\to a} f(x)$$

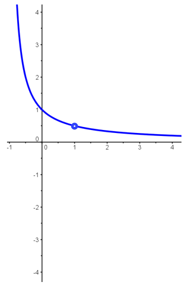
$$2^{\text{o}})\ \exists f(a)$$

$$3^{\text{o}})\ \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

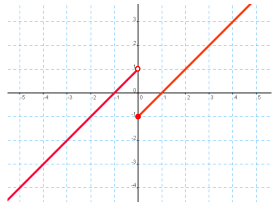
Si no se cumple alguna de las condiciones se dice que f es discontinua en x = a.

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

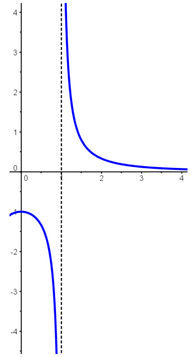
Tipos de discontinuidades:



Evitable.



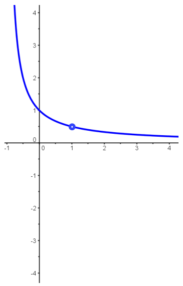
De salto finito



De salto infinito

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Tipos de discontinuidades:



Evitable. $\exists \lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$

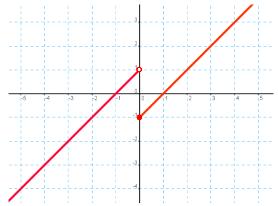
Ejemplo: $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$ en $x = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \dfrac{1}{(x+1)} = \dfrac{1}{2} \\ \nexists f(1) \end{array}\right\} \to \exists \lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1} \neq f(1)$$

f es discontinua evitable en x = 1.

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Tipos de discontinuidades:



De salto finito $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$

Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 0 \\ x-1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ en $x = 0$

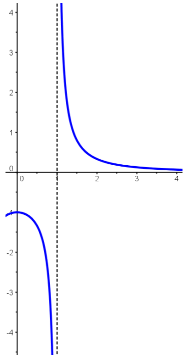
$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x+1) = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x-1) = -1 \end{array}\right\} \to \lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

f es discontinua de salto finito en x = 0 y el salto es igual a 2.

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Tipos de discontinuidades:

<u>De salto infinito</u> $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ o $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$



<u>Ejemplo:</u> $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ en $x = 1$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x^2-1} = -\infty \\ &\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x^2-1} = +\infty \end{aligned}\right\} \to \text{Por lo tanto } \nexists \lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2-1}$$

f es discontinua de salto infinito en x = 1.

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Estudia la continuidad de: $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1,1\}}$$

$\boxed{x=-1}$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to -1^-} \frac{x-1}{x^2-1} = -\infty \\ &\lim_{x\to -1^+} \frac{x-1}{x^2-1} = +\infty \end{aligned}\right\} \to \text{ f es discontinua de salto infinito en } x = -1.$$

$\boxed{x=1}$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} \overset{\frac{0}{0}}{\uparrow}{=} \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x+1)} = \frac{1}{2} \\ &\nexists f(1) \end{aligned}\right\} \to \text{ f es discontinua evitable en } x = 1.$$

f es continua en $\mathbb{R} - \{-1,1\}$

CONTINUIDAD EN UN INTERVALO

Una función se dice que es continua en un intervalo de los números reales si es continua en cada punto del intervalo.

$$f(x) = \frac{1}{x^2-1}$$

f es continua en $\mathbb{R} - \{-1,1\}$

f(x) es continua en el intervalo [2 , 3] porque es continua en todos los punto de dicho intervalo.

f(x) no es continua en el intervalo [0 , 2] por no ser continua en el punto x = 1 que pertenece a dicho intervalo.