ECUACIONES
Y
SISTEMAS
1º Bto. SOCIALES

ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

$$\frac{x}{2}-(x-3)=\frac{x+4}{3}$$

1º Quitar paréntesis $\qquad \frac{x}{2}-x+3=\frac{x+4}{3}$

2º Quitar denominadores $\qquad \frac{3x}{6}-\frac{6x}{6}+\frac{18}{6}=\frac{2x+8}{6}$

3º Agrupar términos $\qquad 3x-6x+18=2x+8$

$$3x-6x-2x=8-18$$

$$-5x=-10$$

4º Despejar la incógnita $\qquad x=\frac{-10}{-5}=2$

ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

$$\frac{x+1}{2}-1=\frac{x+3}{4}-\frac{x+4}{5}$$

$$\frac{10x+10}{20}-\frac{20}{20}=\frac{5x+15}{20}-\frac{4x+16}{20}$$

$$10x+10-20=5x+15-4x-16$$

$$10x-5x+4x=15-16-10+20$$

$$9x=9$$

$$x=1$$

ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

$$\frac{2}{3}\left(\frac{x}{4}-1\right)-\frac{x-1}{2}=2x$$

$$\frac{2x}{12}-\frac{2}{3}-\frac{x-1}{2}=2x$$

$$\frac{2x}{12}-\frac{8}{12}-\frac{6x-6}{12}=\frac{24x}{12}$$

$$2x-8-6x+6=24x$$

$$2x-6x-24x=-6+8$$

$$-28x=2$$

$$x=-\frac{2}{28}=-\frac{1}{14}$$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

Son del tipo $ax^2 + bx + c = 0$

Sus soluciones se obtienen aplicando la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \begin{cases} \text{Si } b^2 - 4ac > 0, \text{ hay dos soluciones.} \\ \text{Si } b^2 - 4ac = 0, \text{ hay una solución.} \\ \text{Si } b^2 - 4ac < 0, \text{ no tiene solución.} \end{cases}$$

Cuando $b = 0$ ó $c = 0$, la ecuación se llama **incompleta** y se puede resolver de forma sencilla sin necesidad de aplicar la fórmula anterior.

- $ax^2 + c = 0 \quad \rightarrow \quad$ se despeja x^2.
- $ax^2 + bx = 0 \quad \rightarrow \quad x(ax + b) = 0$. Sus soluciones son $x = 0$, $x = -b/a$.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

$$4x^2 - 3x - 22 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 352}}{8} = \frac{3 \pm 19}{8} \Rightarrow x = \frac{11}{4};\ x = -2$$

$$x^2 + 5x = 0$$

$$x(x + 5) = 0 \Rightarrow x = 0;\ x = -5$$

ECUACIONES BICUADRADAS.

Son ecuaciones de cuarto grado sin términos de grado impar. $ax^4 + bx^2 + c = 0$

Para resolverlas efectuamos el cambio $x^2 = z$, y por tanto, $x^4 = z^2$, con lo que queda una ecuación de segundo grado en la incógnita z:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad \rightarrow \quad az^2 + bz + c = 0$$

$$x^4 - 17x^2 + 16 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = z \\ x^4 = z^2 \end{array}\right\} \rightarrow z^2 - 17z + 16 = 0 \rightarrow z = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 64}}{2} = \frac{17 \pm 15}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} z = 16 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow \boxed{x = -4 \qquad x = 4} \\ z = 1 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \boxed{x = -1 \qquad x = 1} \end{cases}$$

ECUACIONES BICUADRADAS.

La ecuación $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$ se resuelve mediante el cambio de incógnita $x^2 = z$, que la reduce a una de segundo grado.

$$z^2 - 7z - 18 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{7 \pm 11}{2} \Rightarrow \begin{cases} z = 9 \\ z = -2 \end{cases}$$

Para terminar se deshace el cambio de incógnita.

$$x = \pm\sqrt{z} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = z \Rightarrow z = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \\ \text{Si } z = -2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-2}, \text{ que no es real.} \end{cases}$$

ECUACIONES DE GRADO MAYOR QUE DOS.

$$x^3+2x^2-23x-60=0$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 2 & -23 & -60 \\
-3 & & -3 & 3 & 60 \\
\hline
 & 1 & -1 & -20 & \boxed{0} \\
-4 & & -4 & 20 & \\
\hline
 & 1 & -5 & \boxed{0} & \\
5 & & 5 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Soluciones: } x=-3\ ;\ x=-4\ ;\ x=5}$$

ECUACIONES DE GRADO MAYOR QUE DOS.

$$x^3-5x^2+6x=0$$

$$x\cdot\left(x^2-5x+6\right)=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\x^2-5x+6=0\end{cases}$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot6}}{2\cdot1}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm1}{2}\rightarrow\begin{cases}x=3\\x=2\end{cases}$$

$$\boxed{\text{Soluciones: } x=0\ ;\ x=2\ ;\ x=3}$$

ECUACIONES RACIONALES.

Aparecen fracciones algebraicas. **Hay que comprobar las soluciones.**

Para resolver la ecuación $\frac{3}{x}+5=\frac{4x+6}{x+2}$:

1.º Se halla el común denominador y se eliminan los denominadores.

$$\frac{3(x+2)}{x(x+2)}+\frac{5x(x+2)}{x(x+2)}=\frac{x(4x+6)}{x(x+2)}\Rightarrow 3(x+2)+5x(x+2)=x(4x+6)$$

2.º Se resuelve la ecuación polinómica obtenida.

$$3(x+2)+5x(x+2)=x(4x+6)\Rightarrow x^2+7x+6=0\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\x=-6\end{cases}$$

Como ninguna de ellas anula los denominadores, ambas son válidas.

ECUACIONES RACIONALES.

$$\boxed{\frac{6}{x}+\frac{x+1}{x-2}=6}$$

$$\frac{6(x-2)}{x(x-2)}+\frac{x(x+1)}{x(x-2)}=\frac{6x(x-2)}{x(x-2)}$$

$$6(x-2)+x(x+1)=6x(x-2)$$

$$6x-12+x^2+x=6x^2-12x$$

$$-5x^2+19x-12=0$$

$$5x^2-19x+12=0\quad\rightarrow\quad x=\frac{19\pm\sqrt{361-240}}{10}=\frac{19\pm11}{10}=\boxed{\begin{cases}x_1=3\\x_2=\frac{4}{5}\end{cases}}$$

<u>Se comprueba que las soluciones no anulan ningún denominador y las dos son válidas.</u>

ECUACIONES CON RADICALES.

Son ecuaciones en las que x se encuentra **dentro de una raíz cuadrada.** Es obligatorio **comprobar todas las soluciones**.

$$\boxed{\sqrt{2x-3}+1=x}$$

$\sqrt{2x-3}=x-1$ 1º Se despeja la raíz

$\left(\sqrt{2x-3}\right)^2=(x-1)^2$ 2º Se elevan al cuadrado los dos miembros

$2x-3=x^2-2x+1$ 3º Se simplifica y resuelve

$$x^2-4x+4=0 \rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}=2\rightarrow \boxed{Solución \quad x=2}$$

$$Comprobación: \sqrt{2\cdot 2-3}+1=\sqrt{1}+1=2 \quad La\ solución\ es\ válida.$$

ECUACIONES CON RADICALES. Ejemplo con 2 raíces.

$$\boxed{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+7}=4}$$

$\sqrt{2x-3}=4-\sqrt{x+7}$ 1º Se despeja la raíz

$\left(\sqrt{2x-3}\right)^2=\left(4-\sqrt{x+7}\right)^2$ 2º Se elevan al cuadrado los dos miembros

$2x-3=16+(x+7)-8\sqrt{x+7}$

$x-26=-8\sqrt{x+7}$ 3º Se simplifica

$(x-26)^2=\left(-8\sqrt{x+7}\right)^2$ 4º Se elevan al cuadrado los dos miembros

$x^2-52x+676=64(x+7)$ 5º Se simplifica y se resuelve

$$x^2-116x+228=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{116\pm\sqrt{13456-912}}{2}=\frac{116\pm112}{2}=\begin{cases}x_1=2\\x_2=114\end{cases}$$

Comprobación :

$x_1=2\rightarrow\sqrt{2\cdot2-3}+\sqrt{2+7}=\sqrt{1}+\sqrt{9}=1+3=4\rightarrow Es\ válida$

$x_2=114\rightarrow\sqrt{2\cdot114-3}+\sqrt{114+7}=\sqrt{225}+\sqrt{121}=15+11=26\neq4\rightarrow No\ es\ válida$

Solución: x = 2

ECUACIONES LOGARÍTMICAS.

Son ecuaciones en las que la incógnita está en una expresión afectada por un logaritmo.

$$\boxed{log\ x+log\ 50=3}$$

$$log(x\cdot50)=log\ 10^3$$

$$log(x\cdot50)=log\ 1000$$

$$50x=1000$$

$$x=\frac{1000}{50}$$

$$\boxed{x=20}$$

$$\boxed{5\ log_2(x+3)=log_2 32}$$

$$log_2(x+3)^5=log_2 2^5$$

$$(x+3)^5=2^5$$

$$x+3=2$$

$$\boxed{x=-1}$$

$$\boxed{2\ log\ x=log(10-3x)}$$

$$log\ x^2=log(10-3x)$$

$$x^2=10-3x$$

$$x^2+3x-10=0$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{2}=$$

$$=\frac{-3\pm7}{2}=\begin{cases}\boxed{x_1=2}\\ \cancel{x_2=-5}\end{cases}$$

La solución –5 no es válida por dar log(–5) que no existe.

ECUACIONES EXPONENCIALES.

Son ecuaciones en las que la incógnita está en el exponente.

$$\boxed{3^{1-x^2}=\frac{1}{27}}$$

$$3^{1-x^2}=\frac{1}{3^3}$$

$$3^{1-x^2}=3^{-3}$$

$$1-x^2=-3$$

$$x^2=4$$

$$\boxed{x=\pm2}$$

$$\boxed{5^{x^2-5x+6}=1}$$

$$5^{x^2-5x+6}=5^0$$

$$x^2-5x+6=0$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=$$

$$=\frac{5\pm1}{2}=\boxed{\begin{cases}x_1=2\\x_2=3\end{cases}}$$

$$\boxed{3^{1-x^2}=2}$$

$$log\left(3^{1-x^2}\right)=log\ 2$$

$$\left(1-x^2\right)\cdot log\ 3=log\ 2$$

$$1-x^2=\frac{log\ 2}{log\ 3}$$

$$x^2=1-\frac{log\ 2}{log\ 3}$$

$$x=\pm\sqrt{1-\frac{log\ 2}{log\ 3}}$$

$$\boxed{x=\pm0.6075...}$$

ECUACIONES EXPONENCIALES.

$$\boxed{2^x + 2^{x+1} = 12}$$ Hacemos un cambio de variable z = 2^x

$$2^x + 2^x \cdot 2 = 12$$
$$z + 2z = 12$$
$$3z = 12$$
$$z = 4$$
$$2^x = 4$$
$$\boxed{x = 2}$$

ECUACIONES LINEALES.

En una excursión familiar los adultos han ido en bicicletas de dos ruedas y los niños han ido en bicicletas con ruedines. En total, se han juntado 30 ruedas. ¿Cuántas personas han ido de excursión?

Sea *x* el número de adultos e *y* el número de niños. La ecuación que resulta es:

$$2x + 4y = 30$$

Los posibles resultados son:

Nº Adultos *x*	1	3	5	7	9	11	13
Nº Niños *y*	7	6	5	4	3	2	1

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Las ecuaciones polinómicas de primer grado se llaman **lineales**. En ellas las incógnitas no están elevadas a ningún exponente, ni multiplicadas entre sí, ni con denominadores, ni bajo raíces.
Un sistema formado por ecuaciones lineales se llama **sistema de ecuaciones lineales**. Según el número de soluciones se clasifican en:

$$\text{Sistema}\begin{cases}\text{Compatible (Tiene solución)}\begin{cases}\text{Determinado (Una única solución)} \rightarrow \text{S.C.D.}\\ \text{Indeterminado (Infinitas soluciones)} \rightarrow \text{S.C.I.}\end{cases}\\ \\ \text{Incompatible (No tiene solución)} \rightarrow \text{S.I.}\end{cases}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. Método de sustitución.

$$\begin{cases}2x - 3y = -3 \longrightarrow x = \dfrac{3y-3}{2}\\ 3x + 2y = 2 \longrightarrow 3\left(\dfrac{3y-3}{2}\right) + 2y = 2\end{cases}$$

$$\frac{9y-9}{2} + \frac{4y}{2} = \frac{4}{2}$$
$$9y - 9 + 4y = 4$$
$$13y = 13$$
$$y = 1$$

$$x = \frac{3y-3}{2} \rightarrow x = \frac{3\cdot 1 - 3}{2} = 0$$

$$\boxed{\text{Solución: } x = 0 \text{ ; } y = 1}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. Método de reducción.

$$\begin{cases} 2x-3y=-3 \\ 3x+2y=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x-9y=-9 \\ -6x-4y=-4 \end{cases}$$

$$-13y=-13$$

$$y=1 \longrightarrow 2x-3\cdot 1=-3$$

$$2x=0$$

$$x=0$$

$$\boxed{\text{Solución: } x=0\ ;\ y=1}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. Método gráfico.

Resolver gráficamente el sistema: $\left.\begin{array}{l} 2x+y=3 \\ x-2y=-1 \end{array}\right\}$

Paso 2: Dibujar las líneas.

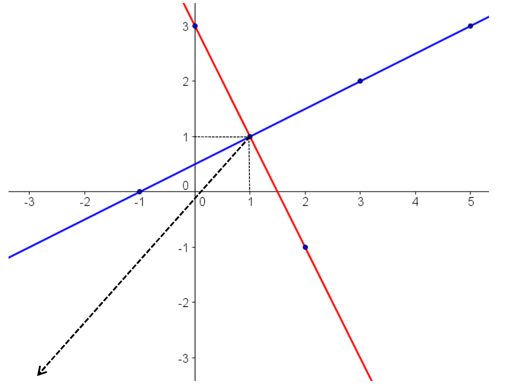
Paso 1: Darle valores.

$2x+y=3$

x	y
0	3
1	1
2	-1

$x-2y=-1$

x	y
-1	0
3	2
5	3



Solución $x=1$; $y=1$

SISTEMAS DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

$$\begin{cases} 2x+2y=28 \\ x^2+y^2=100 \end{cases} \longrightarrow x+y=14 \rightarrow y=14-x$$

$$x^2+(14-x)^2=100$$

$$x^2+14^2+x^2-28x=100$$

$$2x^2-28x+196-100=0$$

$$2x^2-28x+96=0$$

$$x^2-14x+48=0 \longrightarrow x=\frac{14\pm\sqrt{196-192}}{2} \begin{cases} \frac{14+2}{2}=8 \\ \frac{14-2}{2}=6 \end{cases}$$

Solución: $\boxed{x=8 \rightarrow y=6}$ $\boxed{x=6 \rightarrow y=8}$

SISTEMAS DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

$$\begin{cases} x^2+y^2=90 \\ 4x+4y=48 \end{cases} \xrightarrow{E_2:4} \begin{cases} x^2+y^2=90 \\ x+y=12 \end{cases}$$

Despejando y sustituyendo y:

$$\begin{cases} x^2+y^2=90 \\ y=12-x \end{cases} \Rightarrow x^2+(12-x)^2=90 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+144+x^2-24x=90 \Rightarrow 2x^2-24x+54=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-12x+27=0 \Rightarrow \begin{cases} x=9 \Rightarrow y=3 \\ x=3 \Rightarrow y=9 \end{cases}$$

SISTEMAS DE TRES ECUACIONES LINEALES

Si observamos los siguientes sistemas lineales observamos una diferencia:

$$\text{a)}\begin{cases} 3x-5y-10z=-15 \\ \quad 2y+5z=4 \\ \quad\quad 3z=-6 \end{cases} \qquad \text{b)}\begin{cases} 3x+\ y-2z=-4 \\ 2x-2y+5z=4 \\ x-\ y+3z=-6 \end{cases}$$

El primero es **escalonado** y su resolución es mucho más fácil:

$$\text{a)}\begin{cases} 3x-5y-10z=-15 & \rightarrow\ x=0 \\ \quad 2y+5z=4 & \rightarrow\ y=7 \\ \quad\quad 3z=-6 & \rightarrow\ z=-2 \end{cases}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. MÉTODO DE GAUSS.

El método de Gauss transforma un sistema lineal cualquiera en un sistema lineal escalonado:

$$\begin{cases} 3x+\ y-2z=-4 \\ 2x-2y+5z=4 \\ x-\ y+3z=-6 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 3x-5y-10z=-15 & \rightarrow\ x=0 \\ \quad 2y+5z=4 & \rightarrow\ y=7 \\ \quad\quad 3z=-6 & \rightarrow\ z=-2 \end{cases}$$

Se pueden aplicar las siguientes transformaciones:

- Cambiar el orden de las ecuaciones.
- Multiplicar o dividir una ecuación por un número distinto de 0.
- Sustituir una ecuación por el resultado de sumarla o restarla con otra o un múltiplo de otra.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. MÉTODO DE GAUSS.

$$\begin{cases} x-3y+4z=2 \\ 3x+\ y-\ z=3 \\ 2x-\ y+3z=4 \end{cases} \xrightarrow[E_3'=E_3-2E_1]{E_2'=E_2-3E_1} \begin{cases} x-\ 3y+\ 4z=2 \\ \quad 10y-13z=-3 \\ \quad 5y-\ 5z=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x-\ 3y+\ 4z=2 \\ \quad 5y-\ 5z=0 \\ 10y-13z=-3 \end{cases} \xrightarrow[E_3'=E_3-2E_2]{} \begin{cases} x-\ 3y+\ 4z=2 & \rightarrow\ x=1 \\ \quad 5y-\ 5z=0 & \rightarrow\ y=1 \\ \quad\quad -\ 3z=-3 & \rightarrow\ z=1 \end{cases}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. MÉTODO DE GAUSS.

$$\begin{cases} 2x-3y+4z=3 \\ 3x+\ y-\ z=3 \\ 2x-\ y+3z=4 \end{cases} \xrightarrow[E_3'=E_3-E_1]{E_2'=2E_2-3E_1} \begin{cases} 2x-\ 3y+\ 4z=3 \\ \quad 11y-14z=-3 \\ \quad 2y-\ \ z=1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[E_3'=11E_3-2E_2]{} \begin{cases} 2x-\ 3y+\ 4z=3 & \rightarrow\ x=1 \\ \quad 11y-14z=-3 & \rightarrow\ y=1 \\ \quad\quad 17z=17 & \rightarrow\ z=1 \end{cases}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. MÉTODO DE GAUSS.

$$\left\{\begin{array}{r} x-3y+4z=2 \\ 3x+\ y-\ z=3 \\ 4x-2y+3z=4 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{r} x-\ 3y+\ 4z=2 \\ 10y-13z=-3 \\ 10y-13z=-5 \end{array}\right.$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{r} x-\ 3y+\ 4z=2 \\ 10y-13z=-3 \\ \cancel{0=-2} \end{array}\right.$$

El sistema no tiene solución ya que la ecuación $0 = -2$ no tiene sentido

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. MÉTODO DE GAUSS.

$$\left\{\begin{array}{r} x-3y+4z=2 \\ 3x+\ y-\ z=3 \\ 4x-2y+3z=5 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{r} x-\ 3y+\ 4z=2 \\ 10y-13z=-3 \\ 10y-13z=-3 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{r} x-\ 3y+\ 4z=2 \\ 10y-13z=-3 \\ 0=0 \end{array}\right.$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{r} x-\ 3y+\ 4z=2 \\ 10y-13z=-3 \end{array}\right. \xrightarrow{z=\lambda} \left\{\begin{array}{r} x-\ 3y+\ 4\lambda=2 \\ 10y-13\lambda=-3 \end{array}\right.$$

$$\rightarrow x=2-4\lambda+3\left(\frac{-3+13\lambda}{10}\right) \rightarrow x=\frac{20-40\lambda}{10}+\frac{-9+39\lambda}{10}$$

$$\rightarrow y=\frac{-3+13\lambda}{10}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. MÉTODO DE GAUSS.

$$\left\{\begin{array}{r} x-3y+4z=2 \\ 3x+\ y-\ z=3 \\ 4x-2y+3z=5 \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{11-\lambda}{10} \\ y=\dfrac{-3+13\lambda}{10} \\ z=\lambda \end{array}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

Si $\lambda = 1$ tenemos que $x = 1$; $y = 1$; $z = 1$

Si $\lambda = 0$ tenemos que $x = 11/10$; $y = -3/10$; $z = 0$

………

Infinitas soluciones