EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1º Bto. CC.SS.

EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

Las combinaciones de números y letras relacionados entre sí por las operaciones aritméticas se llaman **expresiones algebraicas**.

$$2\cdot x\cdot y+x \qquad \frac{2}{3}\cdot x\cdot y^2\cdot z^3-2$$

Valor numérico de una expresión algebraica es el que se obtiene al sustituir en ella las letras por valores concretos y realizar las operaciones en la expresión algebraica.

$$\left.\begin{matrix} x=2 \\ y=4 \end{matrix}\right\} \rightarrow 3\cdot x\cdot y^2 = 3\cdot 2\cdot 4^2 = 96$$

EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

Una expresión algebraica se llama **monomio** si en ella solo aparecen multiplicaciones y potencias de exponente natural.

$$\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\pi}_{\text{coeficiente}}\cdot\underbrace{r^2\cdot h}_{\text{Parte literal}}$$

Dos **monomios** son semejantes si tienen la misma parte literal.

$25xy^2$ y $3xy^2$ son semejantes

$25x^2y$ y $3xy^2$ no son semejantes

EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

Grado de un **monomio** es la suma de todos los exponentes de las letras.

$3xy^2x^3 \longrightarrow$ Grado 6

$\frac{1}{2}r^2hx^3y \longrightarrow$ Grado 7

Un **polinomio** es la suma indicada de varios monomios no semejantes. El **grado del polinomio** es el mayor de los grados de los monomios que lo forman.

$25xy^2+2xy-y \rightarrow$ es un polinomio

$25xy^2+2xy-y \rightarrow$ es un polinomio de grado 3

SUMA Y RESTA DE POLINOMIOS.

La suma o diferencia de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene sumando o restando los términos semejantes y dejando indicada la suma o resta de los no semejantes.

Sean: $P(x) = 4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2$ y $Q(x) = 2x^4 + x^3 + 4x - 3$

$$P(x) + Q(x) = \left(4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2\right) + \left(2x^4 + x^3 + 4x - 3\right) =$$
$$= 4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2 + 2x^4 + x^3 + 4x - 3 =$$
$$= 6x^4 - x^3 + 3x^2 + 4x - 5$$

$$P(x) - Q(x) = \left(4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2\right) - \left(2x^4 + x^3 + 4x - 3\right) =$$
$$= 4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2 - 2x^4 - x^3 - 4x + 3 =$$
$$= 2x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4x + 1$$

PRODUCTO DE DOS POLINOMIOS.

El producto de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene aplicando la propiedad distributiva, multiplicando los términos del primer factor por cada uno de los términos del segundo factor y simplificando después los términos semejantes.

Ejemplo:

$$\left(2x^2 - x\right)\cdot\left(3x^3 - x^2 - 1\right) = 2x^2\cdot\left(3x^3 - x^2 - 1\right) - x\left(3x^3 - x^2 - 1\right) =$$
$$= 6x^5 - 2x^4 - 2x^2 - 3x^4 + x^3 + x =$$
$$= 6x^5 - 5x^4 + x^3 - 2x^2 + x$$

POTENCIA DE UN POLINOMIO.

Para elevar un polinomio a una potencia, debe multiplicarse por sí mismo tantas veces como indique el exponente.

$$\left(3x^4 - x^2 - 2\right)^2 = \left(3x^4 - x^2 - 2\right)\cdot\left(3x^4 - x^2 - 2\right) =$$
$$= 3x^4\cdot\left(3x^4 - x^2 - 2\right) - x^2\cdot\left(3x^4 - x^2 - 2\right) - 2\cdot\left(3x^4 - x^2 - 2\right) =$$
$$= 9x^8 - 3x^6 - 6x^4 - 3x^6 + x^4 + 2x^2 - 6x^4 + 2x^2 + 4 =$$
$$= 9x^8 - 6x^6 - 11x^4 + 4x^2 + 4$$

PRODUCTOS NOTABLES.

Cuadrado de una suma:	$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
Cuadrado de una diferencia:	$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
Suma por diferencia:	$(a + b)\cdot(a - b) = a^2 - b^2$
Cubo de una suma:	$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab^2 + 3a^2b$
Cubo de una diferencia:	$(a - b)^3 = a^3 - b^3 + 3ab^2 - 3a^2b$

Ejemplos:

a) $(8x + 2y)^2 = (8x)^2 + (2y)^2 + 2\cdot 8x\cdot 2y = 64x^2 + 4y^2 + 32xy$

b) $(5x - y)^2 = (5x)^2 + (y)^2 - 2\cdot 5x\cdot y = 25x^2 + y^2 - 10xy$

c) $(x - 2z)^3 = x^3 - (2z)^3 + 3\cdot x\cdot(2z)^2 - 3\cdot x^2\cdot(2z) = x^3 - 8z^3 + 12xz^2 - 6x^2z$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS.

Dividir el polinomio $3x^4 - 7x^3 - 6x + 7$ entre $3x^2 - x + 1$

$$
\begin{array}{l|l}
3x^4 - 7x^3 \qquad - 6x + 7 & 3x^2 - x + 1 \leftarrow \boxed{\text{Divisor}} \\ \cline{2-2}
-3x^4 + x^3 - x^2 & x^2 - 2x - 1 \leftarrow \boxed{\text{Cociente}} \\ \cline{1-1}
\quad -6x^3 - x^2 - 6x & \\
\quad +6x^3 - 2x^2 + 2x & \\ \cline{1-1}
\qquad -3x^2 - 4x + 7 & \\
\qquad +3x^2 - x + 1 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad -5x + 8 \leftarrow \boxed{\text{Resto}} &
\end{array}
$$

REGLA DE RUFFINI.

La **regla de Ruffini** es un método abreviado para efectuar las divisiones de polinomios entre binomios de la forma $x + a$ o $x - a$

Dividir el polinomio $3x^3 - 5x^2 - 8$ entre $x - 2$

	3	−5	0	−8
2		6	2	4
	3	1	2	−4 → Resto

Cociente: 3, 1, 2

Cociente $3x^2 + x + 2$ y resto -4

REGLA DE RUFFINI.

Divide por Ruffini: $(5x^4 + 6x^2 - 11x + 13) : (x - 2)$

	5	0	6	−11	13
2		10	20	52	82
	5	10	26	41	95 → Resto

$C(x) = 5x^3 + 10x^2 + 26x + 41$

Divide por Ruffini: $(6x^5 - 3x^4 + 2x) : (x + 1)$

	6	−3	0	0	2	0
−1		−6	9	−9	9	−11
	6	−9	9	−9	11	−11 → Resto

$C(x) = 6x^4 - 9x^3 + 9x^2 - 9x + 11$

TEOREMA DEL RESTO.

Teorema del resto. El resto de la división de un polinomio entre el binomio $x - a$ es igual al valor numérico del polinomio para $x = a$

Si dividimos el polinomio $3x^3 - 5x^2 - 8$ entre $x - 2$, y lo hacemos por Ruffini el resto es -4.

	3	−5	0	−8
2		6	2	4
	3	1	2	−4

Si hallamos el valor numérico del polinomio $3x^3 - 5x^2 - 8$ tomando como valor de $x = 2$, obtenemos -4.

$$3(2)^3 - 5(2)^2 - 8 = 24 - 20 - 8 = -4.$$

TEOREMA DEL FACTOR.

Teorema del factor. Un polinomio $P(x)$ tiene como factor $x - a$ si el valor numérico de dicho polinomio para $x = a$ es 0.

Si dividimos el polinomio $3x^3 - 5x^2 - 4$ entre $x - 2$, y lo hacemos por Ruffini el resto es 0.

		3	−5	0	−4
Divisor $C(x) = x - 2$	2		6	2	4
		3	1	2	0

Dividendo: $P(x) = 3x^3 - 5x^2 - 4$

Resto: 0

Cociente: $Q(x) = 3x^2 + x + 2$

Utilizando la propiedad del cociente de polinomios $P(x) = C(x) \cdot Q(x) + R$, al ser el resto $R = 0$ tenemos que $P(x) = C(x) \cdot Q(x)$, y por lo tanto:

$3x^3 - 5x^2 - 4 = (3x^2 + x + 2)\cdot(x - 2)$, y $x - 2$ es un factor de $P(x)$.

RAÍZ DE UN POLINOMIO.

Las raíces del polinomio $P(x)$ son las soluciones de la ecuación $P(x) = 0$.

Ejemplo: Halla las raíces del polinomio $P(x) = x^2 - 6x + 8$

Resolvemos la ecuación $x^2 - 6x + 8 = 0$.

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Las raíces de $P(x)$ son los valores $x = 2$ y $x = 4$

RAÍZ DE UN POLINOMIO.

Las raíces del polinomio $P(x)$ son las soluciones de la ecuación $P(x) = 0$.

Ejemplo: Halla las raíces enteras del polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Como tiene grado tres, tendrá como mucho tres soluciones.

Las raíces serán divisores del 6: ±1, ±2, ±3, ±6

$P(-1) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) + 6 = 8 \neq 0$

$P(1) = 0$ $\quad$ $P(2) \neq 0$ $\quad$ $P(3) = 0$

$P(-2) = 0$ $\quad$ $P(-3) \neq 0$

Las raíces enteras de $P(x)$ son los valores $x = 1$, $x = -2$ y $x = 3$

FACTORIZACIÓN DE UN POLINOMIO.

Cada raíz de un polinomio $P(x)$ tiene asociado un factor del polinomio.

Ejemplo: Halla los factores del polinomio $P(x) = x^2 - 6x + 8$

Hallamos las raíces resolviendo la ecuación $x^2 - 6x + 8 = 0$.

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = 4 \rightarrow (x-4) \text{ es el factor} \\ x_2 = 2 \rightarrow (x-2) \text{ es el factor} \end{cases}$$

Los factores de $P(x)$ son $(x - 2)$ y $(x - 4)$

El polinomio $P(x)$ factoriza como $x^2 - 6x + 8 = 1 \cdot (x - 2) \cdot (x - 4)$

FACTORIZACIÓN DE UN POLINOMIO.

Factoriza $x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 60x$

$$x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 60x = x(x^3 + 2x^2 - 23x - 60)$$

Descomponemos en factores $x^3 + 2x^2 - 23x - 60$:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 2 & -23 & -60 \\
-3 & & -3 & 3 & 60 \\
\hline
 & 1 & -1 & -20 & 0 \\
-4 & & -4 & 20 & \\
\hline
 & 1 & -5 & 0 &
\end{array}$$

Luego: $x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 60x = x(x+3) \cdot (x+4) \cdot (x-5)$

FACTORIZACIÓN DE UN POLINOMIO.

Factoriza $x^5 + 10x^4 + 32x^3 + 40x^2 + 31x + 30$

$x^5 + 10x^4 + 32x^3 + 40x^2 + 31x + 30$

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & 10 & 32 & 40 & 31 & 30 \\
-2 & & -2 & -16 & -32 & -16 & -30 \\
\hline
 & 1 & 8 & 16 & 8 & 15 & 0 \\
-3 & & -3 & -15 & -3 & -15 & \\
\hline
 & 1 & 5 & 1 & 5 & 0 & \\
-5 & & -5 & 0 & -5 & & \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & 0 & &
\end{array}$$

El polinomio $x^2 + 1$ no se puede descomponer más, luego:

$x^5 + 10x^4 + 32x^3 + 40x^2 + 31x + 30 = (x+2) \cdot (x+3) \cdot (x+5) \cdot (x^2+1)$